Capitolo Quinto
LIMITI E CONTINUITÀ

§ 1. LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Ricordiamo che si chiama *successione di numeri reali* ogni applicazione f di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}^+$) in $\mathbb{R}$. Per indicare la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (ossia la successione per cui è $f(n) = a_n$), scriveremo $(a_n)_n$; indicheremo invece con $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme immagine $f(\mathbb{N})$. L'elemento a_n è detto il *termine generale* o *n - imo* della successione.

DEFINIZIONE. Sia data una successione $(a_n)_n$. Se $\mathbb{M} = \{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$, con $n_k < n_{k+1}$, è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, la restrizione della f a $\mathbb{M}$ è ancora una successione $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots = (a_{n_k})_k$, che prende il nome di *sottosuccessione.* Se, in particolare, $\mathbb{M}$ è un insieme del tipo $\{n: n > m\}$, la sottosuccessione è detta anche *coda.*

Il nostro scopo è quello di studiare come si comporta il termine generale di una successione $(a_n)_n$ quando l'indice n diventa molto grande o, come diremo, quando *n tende a* $+\infty$.
Cominciamo con alcuni esempi.

ESEMPI. 1) Consideriamo la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \frac{1}{n}$. Si vede subito che al crescere di n, a_n decresce e si avvicina sempre più al valore 0. Anche il termine generale della successione $(b_n)_n$ definita da $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ è decrescente e si avvicina sempre più a 0. La differenza fra le due situazioni è che, nel primo caso, il termine a_n si avvicina *arbitrariamente* a 0, mentre il termine generale b_n della seconda successione ne rimane lontano o, come diremo, *discosto*. Ci esprimeremo dicendo che a_n *tende a* 0 *al tendere di n a* $+\infty$. Diremo anche che 0 è il *limite* della successione $(a_n)_n$. Diremo, invece, che il valore b_n della seconda successione tende a 1 al tendere di n a $+\infty$, dato che questo diventa e rimane arbitrariamente vicino a 1.

2) Consideriamo la successione

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots$$

Anche i valori di questa successione si avvicinano a 0, ma non è più vero che al crescere di n, la distanza fra il termine generale a_n della successione e 0 diventa sempre più piccola. È però vero che questa distanza diventa e rimane *arbitrariamente* piccola. Dunque il limite della successione è ancora 0.

3) Consideriamo la successione

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{6} \ldots, 1, \frac{1}{n}, \ldots$$

Anche il termine generale a_n di questa successione diventa arbitrariamente vicino a 0, ma *non rimane* tale. Si ha analogamente che a_n diventa, ma non rimane, quanto mai vicino a 1. Siccome a_n finisce col rimaner lontano da ogni altro valore, si conclude che la successione *non ha limite*.

Per contro, tende chiaramente a 0 il termine generale della successione

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{6} \ldots, 0, \frac{1}{n}, \ldots$$

4) Consideriamo la successione di termine generale $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Sappiamo che la successione $(a_n)_n$ è crescente e che l'insieme $\{a_n: n \in \mathbb{N}^+\}$ ha come estremo superiore il numero e. Dunque i termini della successione $(a_n)_n$ diventano e rimangono arbitrariamente vicini ad e. Diremo che a_n *tende a e al tendere di n a* $+\infty$ e che e è il limite della nostra successione.

Lo studio delle successioni dei primi tre esempi è molto facile; già lo studio della successione dell'Esempio 4 ha richiesto molta più fatica (tutto un paragrafo del Capitolo 4). Vediamo ancora un esempio non banale.

ESEMPIO. 5) Partiamo dalla successione $(F_n)_n$ dei *numeri di Fibonacci* definita per ricorrenza da

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Poniamo poi $r_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Per i primi valori di n, si ottiene la seguente tabella:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
r_n	-	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,61538	1,61905	1,61765	1,61818	1,61798

Come si vede, le cifre decimali sembrano *stabilizzarsi* una dopo l'altra. Si ha l'impressione che i numeri r_n tendano ad un valore I,61… Osserviamo che, per altro, la successione $(r_n)_n$ non è monotona. Come possiamo controllare se la nostra successione ha effettivamente un limite? Osserviamo intanto che la successione $(r_n)_n$ può essere definita per ricorrenza da

$$r_1 = 1, r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Si ha, infatti,

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Ora, se si suppone che r_n tenda a un numero reale L, ossia che per n *molto grande*, sia r_n *pressoché uguale a* L, deve essere pressoché uguale a L anche r_{n+1}. Deve dunque essere

$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

da cui $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Il valore $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, essendo negativo, va escluso; l'unico valore possibile di L è dunque $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}617803\ldots$ Ciò è in accordo con i dati della tabella. In realtà, bisognerebbe poi verificare che L è effettivamente il limite della successione, ma questa verifica non è del tutto banale.

Vediamo ora di arrivare alla definizione corretta di limite per una successione. Si tratta di formalizzare la frase "a_n *diventa e rimane arbitrariamente vicino a l*". Ciò significa che, se fissiamo una *misura* per la vicinanza di a_n a l, tutti gli a_n, da un certo punto in poi, soddisfano alla nostra condizione. Il modo più naturale per fissare una misura di vicinanza è quello di fissare un numero reale $\varepsilon > 0$ e di dichiarare ε - vicini due numeri che differiscono, in valore assoluto, meno di ε. Quello che si vuole è dunque che, dato il nostro $\varepsilon > 0$, da un certo indice ν in poi risulti $|a_n - l| < \varepsilon$.

DEFINIZIONE. Si dice che un numero reale l è *limite* di una successione $(a_n)_n$ per n che *tende a* $+\infty$, o che la successione $(a_n)_n$ *tende* o *converge* a l se, comunque si fissi un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che si abbia $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ o, semplicemente, $a_n \to l$.

Il risultato dell'Esempio 5 si esprimerà scrivendo $\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, quello dell'Esempio 4 si esprimerà scrivendo $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Osserviamo esplicitamente che la condizione $|a_n - l| < \varepsilon$ equivale alla $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Consideriamo ora la successione $(F_n)_n$ dei numeri di Fibonacci. Chiaramente questa non converge ad alcun numero reale. Si vede però che i valori di questa successione diventano e restano arbitrariamente grandi. Per contro, i valori della successione

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots, 1, n, 1, n + 1, 1, \ldots$$

diventano sì arbitrariamente grandi, ma non restano tali.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* $+\infty$, o che *diverge* a $+\infty$, se comunque si fissi un numero reale M esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n > M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n > M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ o, semplicemente, $a_n \to +\infty$.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* $-\infty$, o che *diverge* a $-\infty$, se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n < M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n < M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ o, semplicemente, $a_n \to -\infty$.

Per esempio diverge a $-\infty$ la successione di termine generale $a_n = -n$.

ESEMPIO. 6) Consideriamo ora la successione di termine generale $a_n = (-1)^n n$. Questa

non diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$; però si vede subito che è $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$. Diremo, in tal caso, che la successione diverge a ∞. Dunque

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* ∞, o che *diverge* a ∞, se la successione $(|a_n|)_n$ ha limite $+\infty$, ossia se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $|a_n| > M$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow |a_n| > M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ o, semplicemente, $a_n \to \infty$.

Tenuto conto delle definizioni di intorno di un numero reale, di $+\infty$, $-\infty$ e ∞ viste nel § 7 del Cap. 2, si constata che tutte le definizioni sopra date possono essere compendiate in una sola.

DEFINIZIONE. Si dice che una successione $(a_n)_n$ ha *limite* β (potendo β essere un numero reale, $+\infty$, $-\infty$ o ∞) se comunque si fissi un intorno V di β, esiste un numero naturale ν tale che si abbia $a_n \in V$ per ogni n maggiore di ν. In simboli:

$$(\forall V \in \mathcal{U}(\beta))(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n \in V).$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = \beta$ o anche $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$ o, semplicemente, $a_n \to \beta$.

DEFINIZIONE. Una successione è detta *convergente* se ha un limite finito, è detta *divergente* se ha limite infinito, è detta *indeterminata* se non ha limite.

ESEMPIO. 7) Verifichiamo che è $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n-5} = 2$. Dobbiamo provare che

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n-5} - 2\right| < \varepsilon).$$

Dobbiamo cioè verificare che, una volta fissato $\varepsilon > 0$, fra le soluzioni dell'ultima disequazione ci sono tutti i numeri naturali da un certo ν in poi. Scriviamo la disequazione nella forma

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n-5} < 2 + \varepsilon.$$

Poiché non è restrittivo supporre $\varepsilon < 1$ e $n > 5$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (2-\varepsilon)(n-5) < 2n+1 \\ 2n+1 < (2+\varepsilon)(n-5) \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\varepsilon-2)n < 5(2-\varepsilon)+1 \\ (2+\varepsilon-2)n > 1+5(2+\varepsilon) \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \dfrac{5\varepsilon-11}{\varepsilon} \\ n > \dfrac{11+5\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}.$$

Basta dunque che sia $n > \nu$, con ν numero naturale maggiore di $\dfrac{11+5\varepsilon}{\varepsilon}$ (> 5, se è $\varepsilon < 1$).

OSSERVAZIONE. Se una successione tende a $+\infty$ [a $-\infty$], allora tende anche a ∞. La successione dell'Esempio 6 mostra che non sussiste l'implicazione opposta. Ciò dipende dal fatto che ogni intorno di ∞ è anche un intorno di $+\infty$ e $-\infty$. Con questa sola eccezione, si ha che, se è $\alpha \neq \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, esistono $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ e $V \in \mathcal{U}(\beta)$ con $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA 1. 1) *(Unicità del limite) - Il limite di una successione, se esiste, è unico.*
2) *(Limite delle sottosuccessioni) - Se una successione ha limite, allora ha lo stesso limite ogni sua sottosuccessione e, in particolare, ogni sua coda.*
2') *(Limite delle code) - Una successione ha limite se e solo se lo ha una delle sue code.*
3) *(Permanenza del segno) - Se una successione ha limite positivo* [*negativo*], *esiste un* ν *tale che, per* $n > \nu$, *è* $a_n > 0$ [risp. $a_n < 0$].
4) *(Limitatezza delle successioni convergenti) - Se una successione* $(a_n)_n$ *è convergente, allora è limitata* (ossia: *l'insieme immagine* $f(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è limitato*). ∎

La verifica di queste proprietà è molto facile e discende immediatamente dalla stessa definizione di limite e dall'osservazione precedente. Dimostriamo, per esercizio, la (3). Sia $a_n \to l > 0$. Fissiamo un ε positivo ma minore di l. Sappiamo che da un certo ν in poi è $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, da cui $a_n > 0$. Se poi è $a_n \to +\infty$, la cosa è altrettanto facile.

TEOREMA 2. *(Limite delle successioni monotone) - Una successione monotona ha sempre limite (finito o no) che coincide con* $\sup f(\mathbb{N})$, *se la successione è non - decrescente, ed è dato da* $\inf f(\mathbb{N})$, *se la successione è non - crescente.*

DIM. Supponiamo la successione non - decrescente. Sia $\lambda = \sup f(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Si ha intanto $a_n \le \lambda < \lambda + \varepsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > \lambda - \varepsilon$. Essendo la successione non - decrescente, per ogni $n > \nu$ si ha $a_n \ge a_\nu > \lambda - \varepsilon$. dunque per ogni $n > \nu$ si ha $|a_n - \lambda| < \varepsilon$, che è quanto si doveva dimostrare.

Sia ora $\sup f(\mathbb{N}) = +\infty$. Dunque, fissato $M \in \mathbb{R}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_\nu > M$, da cui, sempre per la monotonia della successione, $a_n \ge a_\nu > M$ per ogni $n > \nu$. Ma ciò significa proprio che la successione tende a $+\infty$.

Analogamente nel caso che la successione sia non - crescente. ∎

Si ritrova così, per esempio, che è $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Sussiste il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione

TEOREMA 3. (di Bolzano - Weierstrass).- *Ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente.* ∎

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è detto *compatto* se è chiuso e limitato.

TEOREMA 4. *Un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}$ *è compatto se e solo se ogni successione di elementi di* E *ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di* E. ∎

DIM. Proviamo il '*solo se*". Ogni successione in E è limitata. Per il Teorema 3, essa ha una sottosuccessione convergente a un punto $l \in \mathbb{R}$. Si ha poi $l \in E$, dato che E è chiuso.

Per provare il "*se*" procediamo per assurdo. Se E non è limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $a_n \in E$ tale che $|a_n| > n$. La successione $(a_n)_n$ non ha sottosuccesioni convergenti. Sia ora E non chiuso. Esiste dunque un numero l di accumulazione per E non appartenente ad E. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un $a_n \in E$ tale che $|a_n - l| < \frac{1}{n}$. La successione $(a_n)_n$ converge a $l \notin E$ e lo stesso accade per tutte le sue sottosuccessioni; nessuna di queste può dunque convergere, per l'unicità del limite, ad un elemento di E. ∎

§ § 2. LIMITI DELLE FUNZIONI

Partiamo ancora da alcuni esempi.

ESEMPI. 1) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Qual è il coefficiente angolare della tangente al suo grafico nel punto $P_0(x_0, x_0^2)$? L'idea è questa: dato un generico punto $P(x, x^2)$ appartenente al grafico della funzione, sappiamo che il coefficiente angolare della retta *secante* passante per P_0 e P è dato da $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$. Naturalmente, la φ non è definita in x_0. Immaginiamo di prendere degli x sempre più vicini ad x_0 o, come diremo, di far *tendere* x a x_0. Cosa succede del valore della funzione $\varphi(x)$? Risulta

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0, \text{ con } x \neq x_0.$$

Ora, se x si avvicina ad x_0, il valore $\varphi(x)$ si avvicina a $2x_0$. Dunque la retta secante P_0P *tende* alla retta per P_0 di coefficiente angolare $2x_0$ che sarà appunto la retta cercata.

Diremo che il valore $2x_0$ è il *limite* della funzione $\varphi(x)$ per x che *tende* a x_0.

2) Posto $I = [-1, 1]$, consideriamo la funzione $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - [1 - x^2]$, dove il simbolo [.] indica, al solito, la parte intera. Cosa succede del valore $f(x)$ quando x si avvicina a 0? Si vede subito che è $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se è } x = 0 \\ 1, \text{ se è } x \in I \setminus \{0\}. \end{cases}$ Essendo $f(x)$ costantemente uguale a 1 per $x \neq 0$, non si può che concludere che, anche se è $f(0) = 0$, $f(x)$ *tende a* 1 per x che tende a 0, ossia che il limite di $f(x)$ per x che tende a 0 è 1.

Dunque il valore della funzione f in un punto x_0 non ha influenza sul limite di f per x che tende a x_0. L'esempio precedente mostra poi che può aver senso ricercare il limite di una funzione per x che tende ad un punto x_0 anche se f non è definita in x_0.

3) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Non ha evidentemente senso chiedersi quale sia il limite di f per x che tende a -1, dato che x non può avvicinarsi arbitrariamente a -1, rimanendo nel dominio della f.

Dunque, affinché abbia senso ricercare il limite di una funzione per x che tende ad un punto x_0, quest'ultimo deve essere di accumulazione per il dominio della f.

A questo punto, possiamo dare la definizione di limite, ricalcando quanto fatto per le successioni. Un numero reale l sarà detto *limite* della funzione f per x che tende a x_0, punto di accumulazione per il dominio di f, se accade che, fissata una misura di vicinanza a l, individuata da un numero positivo ε, esiste un intervallo di centro x_0 per ogni x del quale, purché appartenente al dominio di f e diverso da x_0, il valore $f(x)$ risulti ε - vicino a l. Dunque:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E. Diremo che un numero reale l è *limite di f*, o che *f tende a l, per x che tende a* x_0 se, comunque si fissi un numero reale positivo ε, esiste un numero reale positivo δ tale che, per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, da $|x - x_0| < \delta$ segua $|f(x) - l| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$.

ESEMPIO. 4) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Si vede che, al tendere di x a 0, i valori di f diventano e restano arbitrariamente grandi. Si vede altresì che, al crescere di x, i valori di f diventano e restano arbitrariamente vicini a 0.

Ciò ci conduce a dare le definizioni di limite infinito e di limite per x che tende a infinito.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E. Diremo che $+\infty$ è *limite di f*, o che *f tende a* $+\infty$, *per x che tende a* x_0 se, comunque si fissi un numero reale M, esiste un numero reale positivo δ tale che, per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, da $|x - x_0| < \delta$ segua $f(x) > M$. In simboli:

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

Analogamente, si ha:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$.

È dunque $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e sia $+\infty$ di accumulazione per E. Diremo che un numero reale l è *limite di f*, o che *f tende a l, per x che tende a* $+\infty$ se, comunque si fissi un numero reale positivo ε, esiste un numero reale K tale che, per ogni $x \in E$, da $x > K$ segua $|f(x) - l| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)(x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.

Analogamente, si ha:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)(x > K \Rightarrow f(x) > M)$.

E così via. Si danno poi in modo del tutto analogo le quattro definizioni per x che tende a $-\infty$ e quelle per x che tende a ∞ (confronta lo schema di pag. 84); in tutto 16 casi! Vediamo di dare una *definizione universale* di limite che li comprenda tutti.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto α di accumulazione per E, con $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. Diremo che β $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\})$ è *limite di f*, o che *f tende a* β, *per x che tende ad* α se, comunque si fissi un intorno V di β, esiste un intorno U di α tale che, per ogni $x \in E$, da $x \in U \setminus \{\alpha\}$ segua $f(x) \in V$. In simboli:

$$(\forall\, V \in \mathcal{U}(\beta))(\exists\, U \in \mathcal{U}(\alpha))(\forall\, x \in E)(x \in U \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in V).$$

In tal caso si scrive $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} \beta$.

Tipo di limite	Definizione	Esempi
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)$ $(0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon)$	$x_0 = 0,\ l = 1,$ $f(x) = x + 1$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)$ $(0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow f(x) > M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)$ $(0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow f(x) < M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)$ $(0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > M)$	$x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$	$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x > K \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon)$	$l = \dfrac{\pi}{2},\ f(x) = \operatorname{arctg} x$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x > K \Rightarrow f(x) > M)$	$f(x) = x$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x > K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = -x$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x > K \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > M)$	$f(x) = (-1)^{[x]}x$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$	$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x < K \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon)$	$l = -\dfrac{\pi}{2},\ f(x) = \operatorname{arctg} x$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x < K \Rightarrow\ f(x) > M)$	$f(x) = -x$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x < K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = x$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(x < K \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > M)$	$f(x) = (-1)^{[x]}x$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$	$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(\lvert x\rvert > K \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon)$	$l = 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(\lvert x\rvert > K \Rightarrow f(x) > M)$	$f(x) = x^2$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(\lvert x\rvert > K \Rightarrow f(x) < M)$	$f(x) = -x^2$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, K \in \mathbb{R})(\forall\, x \in E)$ $(\lvert x\rvert > K \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > M)$	$f(x) = x^3$

Chi studia deve rendersi ben conto che la definizione generale di limite di pg. 83 si traduce, in ciascuno dei 16 casi possibili, nelle definizioni della Tabella di pg. 84. Verifichiamolo, per esempio, nel caso del limite finito per x che tende a x_0.

TEOREMA 5. *Dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *un punto* x_0 *di accumulazione per* E *e un numero reale* l, *le due seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti*:

1) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

2) $(\forall\, V \in \mathcal{U}(l))(\exists\, U \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\, x \in E)(x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V)$.

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia dato $V \in \mathcal{U}(l)$. Esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che l'intervallo $J =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ è contenuto in V. Per la (1), esiste un numero reale $\delta > 0$ tale, per ogni $x \in E$, da $0 < |x - x_0| < \delta$ segue $|f(x) - l| < \varepsilon$, da cui $f(x) \in V$. Posto $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, si ottiene che da $x \in U \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) \in V$, cioè la (2), dato che U è un intorno di x_0.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sia dato un $\varepsilon > 0$. Resta così individuato l'intervallo $V =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ che è un intorno di l. Per la (2), esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che da $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ segue $f(x) \in V$. Per definizione di intorno, esiste un $\delta > 0$ tale che l'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ è contenuto in U. Dunque, per ogni $x \in E$, da $0 < |x - x_0| < \delta$ segue $f(x) \in V$, ossia $|f(x) - l| < \varepsilon$. ∎

Osserviamo che la definizione di limite di una successione data nel paragrafo precedente è un caso particolare di quella generale di limite di una funzione illustrata in questo paragrafo.

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per E, diremo che $f(x)$ tende a $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ per x che tende a x_0 *da destra* [*da sinistra*] se, comunque si fissi un intorno V di β, esiste un intorno *destro* [*sinistro*] U di x_0 tale che per ogni $x \in E \cap U \setminus \{x_0\}$ segua $f(x) \in V$.

Scriveremo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \beta$ [$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$ o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \beta$].

La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$. (Sappiamo che è $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.)

La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ tende a 1 per $x \to 0^+$ e tende a -1 per $x \to 0^-$. In questo caso, non esiste il $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Per la funzione $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x$, si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Non ha, ovviamente senso ricercare il $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Dati una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per E, se è $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$, è anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$. Il viceversa sussiste se e solo se il punto x_0 è di accumulazione sia per l'insieme $E \cap]-\infty, x_0[$, sia per l'insieme $E \cap]x_0, +\infty[$.

Come già notato nel caso delle successioni, ogni funzione che tende a $+\infty$ [a $-\infty$] tende anche a ∞, ma può accadere che una funzione tenda a ∞ senza tendere né a $+\infty$, né a $-\infty$. Con questa limitazione e analogamente alla Proposizione 1 del Teorema 1, si ha:

TEOREMA 6. *(Unicità del limite) - Dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per* E, *se esiste il* $\lim_{x \to \alpha} f(x)$, *esso è unico.* ∎

ESEMPI. 5) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1} = -1$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e cerchia un intorno U di 0 tale che da $x \in U \setminus \{0\}$ segua $\frac{x+1}{x-1} \in V =]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$. Consideriamo dunque la disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - (-1)\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -1-\varepsilon < \frac{x+1}{x-1} < -1+\varepsilon.$$

Teniamo presente che noi non cerchiamo *tutte* le soluzioni del sistema ottenuto, ma ci basta controllare che l'insieme di queste *contiene* un intervallo aperto di centro 0. Possiamo dunque limitarci al caso $x < 1$. Con tale limitazione, il sistema diventa

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)(1-x) > x+1\\ x+1 > (1-\varepsilon)(1-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\varepsilon-1 > (1+\varepsilon+1)x\\ (1-\varepsilon+1)x > 1-\varepsilon-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2+\varepsilon)x < \varepsilon\\ (2-\varepsilon)x > -\varepsilon.\end{cases}$$

Non essendo restrittivo supporre $\varepsilon < 2$, si ottiene, in fine il sistema $-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < x < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$.

L'insieme così trovato è un intorno di 0 e il nostro scopo è raggiunto.

6) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1} = \infty$. Fissiamo un numero reale M e cerchiamo un intorno U di 1 tale che da $x \in U \setminus \{1\}$ segua $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > M$. La disequazione può essere scritta nella forma $|x+1| > M|x-1|$ e anche semplicemente $x+1 > M|x-1|$, dato che è lecito supporre $x > -1$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases}-1 < x < 1\\ x+1 > M(1-x)\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1\\ x+1 > M(x-1)\end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-1 < x < 1\\ (1+M)x > M-1\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1\\ (M-1)x < M+1.\end{cases}$$

Essendo lecito supporre $M > 1$, si ottiene

$$\begin{cases}-1 < x < 1\\ x > \frac{M-1}{M+1}\end{cases} \vee \begin{cases}x > 1\\ x < \frac{M+1}{M-1}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{M-1}{M+1} < x < \frac{M+1}{M-1}.$$

Abbiamo effettivamente trovato un intorno di 1, dato che è $0 < \frac{M-1}{M+1} < 1 < \frac{M+1}{M-1}$.

7) Vogliamo verificare che è $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e cerchiamo un intorno U di ∞ tale che da $x \in U$ segua $\frac{x+1}{x-1} \in V =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$. Consideriamo dunque la disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \left(x < 1-\frac{2}{\varepsilon}\right) \vee \left(x > 1+\frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Abbiamo così effettivamente trovato un intorno di ∞.

§ 3. I TEOREMI SUI LIMITI DELLE FUNZIONI

Analogamente al caso delle successioni, si prova il

TEOREMA 7. *Siano dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *(Permanenza del segno) - Se f ha limite positivo* [*negativo*]*, finito o infinito, per x che tende ad* α*, allora esiste un intorno U di* α *tale che, per ogni* $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$*, si ha* $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$].

2) *(Limitatezza locale) - Se f ha limite finito per x che tende ad* α*, allora esiste un intorno U di* α *dove la f è limitata* [*cioè tale che f(U) è un insieme limitato*]. ∎

TEOREMA 8. *(Limite della restrizione) - Siano dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, un sottoinsieme A di E e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per A. Se f ha limite* β ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$) *per x che tende ad* α*, allora tende a* β*, al tendere di x ad* α*, anche la restrizione della f ad A.*

DIM. Per ipotesi si ha che, dato $V \in \mathcal{U}(\beta)$, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) \in V$. È dunque, in particolare, $f(x) \in V$ per ogni $x \in A \cap U \setminus \{\alpha\}$. ∎

TEOREMA 8'. *Siano dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E. Se esistono due sottoinsiemi A e B di E tali che le restrizioni di f ad A e B hanno limiti diversi per x che tende ad* α*, allora f non ha limite per x che tende ad* α*.*

DIM. Se esistesse il $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, dovrebbero tendere a β anche le restrizioni di f ad A e a B, ma ciò non può essere. Dunque f non può avere limite. ∎

ESEMPIO. 1) Vogliamo provare che, posto $f(x) = \sin x$, non esiste il $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Consideriamo i due insiemi di numeri reali $A = \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$. Se $x \to \infty$, la restrizione di f ad A tende a 0, mente la restrizione di f a B tende a 1. La tesi segue dal Teorema precedente.

Questo risultato si generalizza molto facilmente:

Una funzione periodica non costante non può avere limite per x che tende a $+\infty$ [$-\infty, \infty$].

TEOREMA 9. *(Limite del valore assoluto) - Siano dati una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E. Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$*, allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = |l|$*. Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ [$-\infty, \infty$]*, allore è* $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = +\infty$.

DIM. Sia $f(x) \to l \in \mathbb{R}$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \varepsilon$. Per gli stessi x si ha $||f(x)| - |l|| \le |f(x) - l| < \varepsilon$. L'altro caso è ancora più facile. ∎

Si tenga presente che non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema. Per constatarlo, basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Questa funzione non ha limite per $x \to 0$, mentre la funzione $|f|$ tende banalmente a 1.

TEOREMA 10. *(Limite della somma) - Siano dati due funzioni f,g*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *e* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$, *con* $l, m \in \mathbb{R}$, *allora si ha anche* $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = l + m$.

2) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ [$-\infty, \infty$] *e se g è inferiormente limitata* [rispettivamente: *superiormente limitata, limitata*] *in un intorno di* α, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = +\infty$ [$-\infty, \infty$].

DIM. 1) Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di α tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) + g(x) - (l + m)| < \varepsilon$. Sappiamo che, per ipotesi, esistono $U', U'' \in \mathcal{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| \le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Caso $f \to +\infty$ e g inferiormente limitata. Esistono un intorno U' di α e un numero reale K tali che da $x \in E \cap U'$ segue $g(x) > K$. Fissiamo ora un numero reale M. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) > M - K$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$f(x) + g(x) > (M - K) + K = M. \blacksquare$$

Si ha, per esempio, $\lim_{x\to+\infty}(x + \frac{1}{\sin^2 x}) = +\infty$, dato che la funzione identica tende a $+\infty$ e che la funzione $\frac{1}{\sin^2 x}$, pur non ammettendo limite, è inferiormente limitata.

Vediamo, mediante semplici esempi, che se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, nulla si può dire, in generale, del $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x))$; il problema va perciò studiato di caso in caso.

ESEMPIO. 2) Consideriamo le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x$, $g_1(x) = -x$, $g_2(x) = -3x$, $g_3(x) = -2x + 1$, $g_4(x) = -2x + \sin x$. Si ha banalmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} g_2(x) = \lim_{x\to+\infty} g_3(x) = \lim_{x\to+\infty} g_4(x) = -\infty$. Ora: $f + g_1$ tende a $+\infty$, $f + g_2$ tende a $-\infty$, $f + g_3$ tende a 1 e $f + g_4$ non ha limite.

Si badi che può ben accadere che la somma di due funzioni abbia limite senza che abbiano limite le due funzioni date. Basta sommare una funzione senza limite con la sua opposta. Per esempio, si pone $f(x) = \sin x$ e $g(x) = -\sin x$ e si fa tendere x a $+\infty$.

TEOREMA 11. *Siano dati una funzione f*: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E e un numero reale k.*

1) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = kl$.

2) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ *e se è* $k \neq 0$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = \infty$.

3) *In ogni caso, si ha* $\lim_{x\to\alpha} 0f(x) = 0$.

DIM. 1) Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste un intorno U di α tale che, da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{|k|}$. Per gli stessi x si ha $|kf(x) - kl| = |k|\,|f(x) - l| < |k|\,\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$.

La (2) si prova in modo analogo. La (3) è ovvia. ∎

In particolare, si ha:

Da $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *segue* $\lim_{x\to\alpha} -f(x) = -l$.

DEFINIZIONE. Una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *discosta da* 0 *in E* se esiste un numero reale $k > 0$ tale che risulti $|f(x)| > k$ per ogni $x \in E$.

La funzione esponenziale è sempre diversa da 0, ma non è discosta da 0. È invece discosta da 0 la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0{,}00001 + |x|$.

TEOREMA 12. *(Limite del prodotto) - Siano dati due funzioni* $f,g\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *e* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$, *con* $l, m \in \mathbb{R}$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = lm$.

2) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ *e se g è discosta da* 0 *in un intorno di* α, *allora si ha anche* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \infty$.

3) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *e se g è limitata in un intorno di* α, *allora è* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$.

DIM. 1) Per il Teorema della limitatezza locale, esistono un numero reale $K > 0$ e un intorno V di α tali che da $x \in E \cap V$ segue $|g(x)| < K$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$.

Sappiamo che, per ipotesi, esistono $U', U'' \in \mathcal{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2K}$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}$. Sia $U = V \cap U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x) - lm| = |f(x)g(x) - lg(x) + lg(x) - lm| \le |f(x) - l|\,|g(x)| + |l|\,|g(x) - m| \le$$
$$\le |f(x) - l|\,K + |l|\,|g(x) - m| < |f(x) - l|\,K + (|l| + 1)|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Esistono un intorno U' di α e un numero reale $K > 0$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $|g(x)| > K$. Fissiamo un numero reale M. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| > \frac{M}{K}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| > \frac{M}{K}\,K = M.$$

3) Esistono un intorno U' di α e un numero reale $K > 0$ tali che da $x \in E \cap U'$ segue $|g(x)| < K$. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Esiste un intorno U'' di α tale che da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Sia ora $U = U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si h:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}\,K = \varepsilon.$$ ∎

ESEMPI. 3) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sin^2 x} = +\infty$, dato che la funzione identica tende a $+\infty$ e che la funzione $\frac{1}{\sin^2 x}$, pur non ammettendo limite, è discosta da 0 e positiva.

4) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, dato che la funzione $\frac{1}{x}$ tende a 0 e che la funzione $\sin x$, pur non ammettendo limite, è limitata.

Vediamo, mediante semplici esempi, che se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$, nulla si può dire, in generale, del $\lim_{x\to\alpha} f(x)\, g(x)$; il problema va perciò studiato di caso in caso.

ESEMPIO. 5) Consideriamo le funzioni di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2,\ g_1(x) = \frac{1}{x},\ g_2(x) = \frac{1}{x^3},\ g_3(x) = -2\frac{1}{x^2},\ g_4(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

Si ha banalmente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} g_2(x) = \lim_{x\to+\infty} g_3(x) = \lim_{x\to+\infty} g_4(x) = 0.$$

Ora: $f\,g_1$ tende a $+\infty$, $f\,g_2$ tende a 0, $f\,g_3$ tende a -2 e $f\,g_4$ non ha limite.

Si badi che può ben accadere che il prodotto di due funzioni abbia limite senza che abbiano limite le due funzioni date. Infatti, la funzione f di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|}$ non ha limite per x che tende a 0, mentre la funzione f^2 ha limite 1.

TEOREMA 13. *(Limite della reciproca) - Siano dati una funzione* $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *e un punto* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ *di accumulazione per E.*

1) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

2) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, *allora si ha* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$.

3) *Se è* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *e se* α *è di accumulazione per l'insieme* $E' = \{x \in E\colon f(x) \neq 0\}$, *allora è* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty$. ∎

La (1) si prova con tecniche simili a quelle usate in precedenza. Verifichiamo, come esercizio, la (2). Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Esistono un intorno U di α tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. Per tali x si ha $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$. Analogamente per la (3).

Osserviamo che se, per x tendente ad α, la f tende a $\beta \neq 0$, dalla definizione di limite si ottiene che esiste un intorno U di α in cui la f non si annulla. La funzione $\frac{1}{f}$ risulta definita almeno in $U \cap E$ e ha dunque senso ricercarne il limite per $x \to \alpha$. Invece, nel caso (3) è indispensabile aggiungere l'ipotesi che α sia di accumulazione per l'insieme $E' = \{x \in E\colon f(x) \neq 0\}$.

ESEMPIO. 6) Consideriamo infatti la funzione f di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{per } |x| > 1 \\ 0, & \text{per } |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; ma la funzione $\frac{1}{f}$ è definita solo per $|x| > 1$ e non ha quindi senso ricercarne il limite per $x \to 0$.

Siano dati due funzioni f,g: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E. Esista inoltre un intorno U di α tale che sia $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$. Ha dunque senso cercare il $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$. I relativi teoremi si ricavano da quelli precedenti osservando che è $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{g(x)}$. (Esercizio.)

Consideriamo ancora le funzioni dell'Esempio 5 e scriviamo le funzioni fg_i in una delle forme $\frac{f}{1/g_i}$, $\frac{g_i}{1/f}$. Si vede che i Teoremi sui limiti non ci aiutano nemmeno nel caso in cui si debba ricercare il limite dal rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 o entrambe a ∞.

In generale, con le dovute cautele per non dividere per 0, si può passare da un'espressione in cui compare un prodotto di funzioni a un'altra in cui figura un quoziente di funzioni e viceversa:

$$fg = \frac{f}{1/g};\quad \frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f} = f\frac{1}{g}.$$

Abbiamo così incontrato 4 casi in cui i teoremi sui limiti non ci soccorrono (li diremo *casi di indeterminazione*):

- Somma di due funzioni di cui una tende a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$ (lo diremo *caso* $\infty - \infty$).
- Prodotto di due funzioni di cui una tende a ∞ e l'altra a 0 (lo diremo *caso* $\infty \times 0$).
- Quoziente di due funzioni che tendono entrambi a ∞ (lo diremo *caso* ∞/∞).
- Quoziente di due funzioni che tendono entrambi a 0 (lo diremo *caso* 0/0).

Incontreremo tra poco altri tre casi di indeterminazione:

- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$ (lo diremo *caso* 1^∞).
- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ (lo diremo *caso* 0^0).
- Funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$ (lo diremo *caso* ∞^0).

Analogamente a quanto visto nel caso delle successioni, sussiste il seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 14. *(Limite delle funzioni monotone) - Siano* f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona e* $\alpha = \sup E \notin E$ *(con* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*), allora esiste il limite della f per* $x \to \alpha$ *e si ha*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \begin{cases} \sup f(E), & \text{se } f \text{ è non - decrescente} \\ \inf f(E), & \text{se } f \text{ è non - crescente} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Sussiste un analogo teorema nell'ipotesi $\alpha = \inf E \notin E$. In questo caso si avrà:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \begin{cases} \inf f(E), & \text{se } f \text{ è non - decrescente} \\ \sup f(E), & \text{se } f \text{ è non - crescente} \end{cases}.$$

L'esistenza del limite fa parte della tesi del teorema e non dell'ipotesi; anzi è, in certo qual modo, la parte più importante della tesi.

L'ipotesi $\alpha = \sup E \notin E$ è essenziale. Infatti, se esiste il valore $f(\alpha)$, questo può avere influenza per la determinazione di $\sup f(E)$ o di $\inf f(E)$, mentre sappiamo che non ha alcuna in-

fluenza sul limite della f. Naturalmente, se è $\alpha = \sup E \in E$, si può sempre considerare la restrizione di f a $E \setminus \{\alpha\}$.

ESEMPIO. 7) Sia f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } x < 1 \\ 2, & \text{per } x = 1 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, mentre è $\sup f(E) = 2$.

TEOREMA 15. *(Criteri del confronto) - Siano dati tre funzioni f, g, h: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ di accumulazione per E. Inoltre, esista $V \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che, per $x \in E \cap V \setminus \{\alpha\}$ sia $f(x) \le g(x \le h(x)$.*

1) Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = l \in \mathbb{R}$, allora è anche $\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$.

2) Se è $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, allora è anche $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.

3) Se è $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ allora è anche $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.

DIM. 1) Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, esistono $U', U'' \in \mathcal{U}(\alpha)$ tali che da $x \in E \cap U' \setminus \{\alpha\}$ segue $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e da $x \in E \cap U'' \setminus \{\alpha\}$ segue $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$. Sia ora $U = V \cap U' \cap U''$. Se è $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$, si ha

$$l - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l + \varepsilon.$$

2) Fissiamo un numero reale M. Per ipotesi, esiste $U \in \mathcal{U}(\alpha)$ tale che da $x \in E \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $f(x) > M$. Da $x \in E \cap V \cap U \setminus \{\alpha\}$ segue $g(x) \ge f(x) > M$. Analogamente per la (3). ∎

ESEMPIO. 8) Siano f, g, h: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ le tre funzioni definite da

$$f(x) = 1 - |x|,\ g(x) = 1 + x\sin\frac{1}{x},\ h(x) = 1 + |x|.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Le funzioni f e h tendono a 1 per x che tende a 0; ne viene che tende a 1 anche g. In realtà, per arrivare a questo risultato ci bastavano i teoremi sul limite del prodotto e della somma. Esempi più istruttivi li vedremo nel § 6.

TEOREMA 16. *(Limite delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili f: $E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e g: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Siano poi $x_0, u_0 \in \mathbb{R}$, con x_0 di accumulazione per E, u_0 di accumulazione per E' e si abbia $\lim_{x\to x_0} f(x) = u_0$ e $\lim_{u\to u_0} g(u) = \gamma$. In fine, esista $U^* \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che da $x \in E \cap U^* \setminus \{x_0\}$ segua $f(x) \ne u_0$. Allora esiste ed è uguale a γ anche il $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.*

DIM. Riscriviamo le ipotesi sull'esistenza dei limiti:

$$(\forall\, V \in \mathcal{U}(\gamma))(\exists\, W \in \mathcal{U}(u_0))(\forall\, u \in E')(u \in W \setminus \{u_0\} \Rightarrow g(u) \in V),$$
$$(\forall\, W \in \mathcal{U}(u_0))(\exists\, U' \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\, x \in E)(x \in U' \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in W).$$

Sia $U = U' \cap U^*$. Prendiamo ora un $x \in E \cap U \setminus \{x_0\}$. Si ha $f(x) \in E' \cap W \setminus \{u_0\}$ e quindi $g(f(x)) \in V$. Ciò significa appunto che è $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \gamma$. ∎

Osserviamo che l'ipotesi che sia $f(x) \neq u_0$ almeno in un intorno di x_0 è essenziale per la validità del Teorema.

ESEMPIO. 9) Siano date le funzioni $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(u) = \begin{cases} 1, & \text{se è } u = 0 \\ 0, & \text{se è } u \neq 0 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{u \to 0} g(u) = 0$. D'altra parte, posto $B = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, si ha

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \in B \\ 0, & \text{se è } x \notin B \end{cases}.$$

Ne viene che non esiste il $\lim_{x \to 0} g(f(x))$.

Il Teorema si estende in modo naturale al caso in cui x_0 o u_0 sono infiniti. Se u_0 è infinito, l'ipotesi $f(x) \neq u_0$ è ovviamente soddisfatta.

Osserviamo ancora che il Teorema sussiste anche se g non è definita in u_0, *purché* x_0 sia di accumulazione per il dominio della funzione composta.

ESEMPIO. 10) Siano date le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{se è } |x| > 1 \\ 0, & \text{se è } |x| \leq 1 \end{cases}, \qquad g(u) = \log u.$$

Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{u \to 0} g(u) = -\infty$. D'altra parte, il dominio della funzione composta $g \circ f$ è dato dall'insieme $\{x\colon |x| > 1\}$. Ne viene che non ha senso ricercare il $\lim_{x \to 0} g(f(x))$.

Esiste una terza situazione in cui si può applicare il Teorema sul limite delle funzioni composte. Ne parleremo nel prossimo paragrafo (Ter. 16').

§ 4. LE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$ che sia di accumulazione per E. Si dice che la funzione f è *continua in* x_0 se è $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se accettiamo di dire che una funzione è *continua* in ogni punto isolato del suo dominio, si vede subito che la definizione prcedente può essere così riformulata:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$. Si dice che la funzione f è *continua in* x_0 se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

ossia se e solo se

$$(\forall\, V \in \mathcal{U}(f(x_0)))(\exists\, U \in \mathcal{U}(x_0))(\forall\, x \in E)(x \in U \Rightarrow\ f(x) \in V).$$

DEFINIZIONE. Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detta *continua in E* se è continua in ogni punto di E.

Le nozioni di limite destro e limite sinistro di una funzione per $x \to x_0$ conducono a formulare analoghe definizioni per la continuità.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in E$. Si dice che la funzione f è *continua a destra* [*a sinistra*] *in* x_0 se è continua in x_0 la restrizione d f a $E \cap [x_0, +\infty[$ o, rispettivamente, a $E \cap]-\infty, x_0]$.

Si ha immediatamente che

Una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in E$ se e solo se f è continua sia a destra che a sinistra in x_0.

OSSERVAZIONE (Prolungamento per continuità). Siano dati una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e un punto x_0 di accumulazione per E, con $x_0 \notin E$. Se è $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $(\in \mathbb{R})$, si può prolungare f in modo naturale anche al punto x_0, definendo $f(x_0) := l$. La nuova funzione ottenuta, che continueremo a indicare con f, risulta, per costruzione, continua nel punto x_0. Questao procedimento prende il nome di *prolungamento per continuità della f in* x_0.

ESEMPIO. 1) Consideriamo la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Vedremo nel § 6 che è $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Prolungando la nostra funzione per continuità in 0, si ottiene la nuova funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 1, & \text{se è } x = 0 \end{cases}.$$

Quasi tutti i Teoremi sui limiti studiati nel § 3 possono essere riformulati in termini di funzioni continue. Rienunciamoli sinteticamente. Chi studia ne controlli la correttezza.

TEOREMA 17. *Sia f una funzione di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*
1) *(Permanenza del segno) - Se f è continua in un punto $x_0 \in E$, ed è $f(x_0) > 0$ [< 0], allora esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in E \cap U$, si ha $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$].*
2) *(Limitatezza locale) - Se f è continua in un punto $x_0 \in E$, allora esiste un intorno U di x_0 dove f è limitata.*
3) *(Continuità della restrizione) - Se la f è continua in un punto $x_0 \in E$, è continua in x_0 la restrizione della f ad un qualunque sottoinsieme A di E contenente x_0.*
4) *(Continuità del valore assoluto) - Se la funzione f è continua in $x_0 \in E$, è continua in x_0 anche la funzione $|f|$.* ∎

TEOREMA 18. *Siano f,g due funzioni di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*
1) *(Continuità della somma e del prodotto) - Se f e g sono continue in un punto $x_0 \in E$, allora sono continue in x_0 anche le funzioni $f + g$ e fg, kf, con $k \in \mathbb{R}$.*
2) *(Continuità della reciproca e del quoziente) - Se f e g sono continue in un punto $x_0 \in E$, e se è $g(x_0) \neq 0$, allora sono continue in x_0 anche le funzioni $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$.* ∎

Dunque: *Somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono ancora funzioni continue.*
E ancora, dato che le funzioni costanti sono banalmente continue, si ha che:
L'insieme delle funzioni continue di $E(\subset \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ formano uno spazio vettoriale.

TEOREMA 16'. *(Limite delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili f: $E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e g: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Siano poi x_0, $u_0 \in \mathbb{R}$, con x_0 di accumulazione per E, $u_0 \in E'$ e si abbia $\lim_{x \to x_0} f(x) = u_0$. Allora, se g è continua in u_0, esiste anche il limite, per $x \to x_0$, della funzione composta e si ha $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(u_0)$.* ∎

TEOREMA 19. *(Continuità delle funzioni composte) - Siano date due funzioni componibili f: $E(\subset \mathbb{R}) \to E'(\subset \mathbb{R})$ e g: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $x_0 \in E$ e g è continua in $u_0 = f(x_0)$, allora è continua in x_0 anche la funzione composta $g \circ f$.* ∎

Menzioniamo ancora un risultato che ci sarà di una qualche utilità.

TEOREMA 20. *(Continuità della funzione inversa) - Siano I un intervallo e f: $I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora l'inversa di f è una funzione continua.* ∎

Si tenga presente che, per la validità di questo Teorema, l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è essenziale, mentre non è affatto richiesto che f sia continua.

ESEMPIO. 2) Consideriamo la funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$E = [0, 1] \cup]2, 3], \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se è } 0 \le x \le 1 \\ x - 1, & \text{se è } 2 < x \le 3 \end{cases}.$$

Questa è una funzione crescente, ma non è definita su un intervallo. La sua inversa è la funzione φ: $E'(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$E' = [0, 2], \quad \varphi(y) = \begin{cases} y, & \text{se è } 0 \le y \le 1 \\ y + 1, & \text{se è } 1 < y \le 2 \end{cases}.$$

La funzione φ non è continua nel punto 1, dato che è $\lim_{y \to 1^+} \varphi(y) = 2 \neq 1 = \varphi(1)$. Per contro, φ è definita e crescente su un intervallo e, pur non essendo continua, ha inversa continua (la f).

OSSERVAZIONE. Dire che una funzione f: $E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *non è continua*, significa dire che esiste almeno un punto x_0 *del suo dominio* dove la f non è continua. È dunque $x_0 \in E$, e x_0 di accumulazione per E; inoltre, o f non ha limite per $x \to x_0$, o è $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

E se x_0 non appartiene al dominio E della funzione? Allora in x_0 *f non è né continua né discontinua*, semplicemente in x_0 la funzione *non c'è*, e ciò anche se x_0 è di accumulazione per E.

Consideriamo, per esempio, la funzione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Come vedremo fra un attimo, questa è una funzione continua. Ora il punto 0 non fa parte del dominio di f; non ha dunque senso dire che f è discontinua in 0: la funzione f in 0 *non c'è*; il problema della continuità in 0 non si pone. Quello che si può dire è che, in questo caso, *f non è* prolungabile per continuità in 0.

Consideriamo ancora la funzione f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Non ammettendo f limite per $x \to 0$, non può essere prolungata per continuità in tale punto. È però ovviamente possibile prolungarla in modo da renderla continua a destra o a sinistra in 0.

§ 5. CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

In questo paragrafo verificheremo che le funzioni elementari sono continue. Per farlo, ne constateremo la continuità in un generico punto del loro dominio, a meno che, si capisce, non sia possibile sfruttare i teoremi già noti.

Continuità delle funzioni razionali e delle funzioni radice

È banale osservare che le funzioni costanti e la funzione identica $f(x) = x$ sono continue. Dalla continuità del prodotto segue quella delle funzioni ax^n e dalla continuità della somma si ottiene poi quella delle funzioni razionali intere. In fine, dalla continuità del quoziente si ricava la continuità di tutte le funzioni razionali.

Sappiamo che la funzione radice n - ima è l'inversa di una funzione (la funzione potenza x^n) crescente e definita su un intervallo (tutto $\mathbb{R}$ se n è dispari, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se n è pari). Dunque, per il Teorema 20, la funzione radice è continua.

Per puro esercizio, dimostriamo direttamente che è continua la funzione $\sqrt{x}$. Siano dunque dati un punto $x_0 > 0$ e un numero reale positivo ε. Si ha

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}, \text{ che è} < \varepsilon \text{ se e solo se è } |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}.$$

Basta dunque prendere $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$. Se è $x_0 = 0$, si ha $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow (0 \le)\ x < \varepsilon^2$.

Continuità del'esponenziale e del logaritmo

Fissiamo un numero reale positivo a e supponiamo, intanto, che sia $a > 1$. In virtù della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e della definizione di potenza con esponente reale, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sup\{a^x: x < x_0, x \in \mathbb{R}\} = \sup\{a^r: r < x_0, r \in \mathbb{Q}\} = a^{x_0} =$$
$$= \inf\{a^s: s > x_0, s \in \mathbb{Q}) = \inf\{a^x: x > x_0, x \in \mathbb{R}).$$

In virtù del Teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha

$$a^{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} a^x = \lim_{x \to x_0^+} a^x = \lim_{x \to x_0} a^x.$$

E ciò prova la continuità della funzione esponenziale a^x con $a > 1$. Per $0 < a < 1$, si procede in modo analogo o, sfruttando l'uguaglianza $a^x = \dfrac{1}{(1/a)^x}$, si applica il Teorema sulla continuità della funzione reciproca. Per $a = 1$, la tesi è ovvia.

Il logaritmo è l'inversa di una funzione strettamente monotona e definita su un intervallo (= $\mathbb{R}$) ed è dunque continua per il Teorema 20.

Dalla continuità della funzione esponenziale e dal Teorema sul limite delle funzioni composte, si ha che la ricerca dei limiti di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$, con $f(x) > 0$, è ricondotta alla ricerca dei limiti della funzione $g(x)\log f(x)$. Ci si riconduce così ad utilizzare i risultati sul limite di un prodotto. Questi cadono in difetto quando si ottiene una situazione di $\infty \times 0$. Ciò accade nei seguenti tre casi (che generano le forme indeterminate già annunciate):

se $f(x) \to 1$, $(\Rightarrow \log f(x) \to 0)$ e $g(x) \to \infty$; si ha la forma indeterminata 1^∞.

se $f(x) \to 0$, $(\Rightarrow \log f(x) \to -\infty)$ e $g(x) \to 0$; si ha la forma indeterminata 0^0.

se $f(x) \to +\infty$, $(\Rightarrow \log f(x) \to +\infty)$ e $g(x) \to 0$; si ha la forma indeterminata ∞^0.

Continuità delle funzioni goniometriche e delle loro inverse

Proviamo la continuità della funzione seno. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e un $\varepsilon > 0$. Dato che, per $u \neq 0$, è sempre $|\sin u| < |u|$, si ha

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|,$$

Basta dunque prendere $\delta = \varepsilon$.

La continuità della funzione coseno si può provare in modo perfettamente analogo, ma si può più comodamente osservare che è $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ed applicare il Teorema sulla continuità dalla funzione composta.

La continuità della funzione tangente segue ora subito dalla continuità del quoziente.

La continuità delle funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente segue, al solito, dal Teorema 20 sulla continuità dell'inversa.

§ 6. L I M I T I N O T E V O L I

In questo paragrafo stabiliremo alcuni limiti di fondamentale importanza, la cui conoscenza è premessa indispensabile per affrontare un qualunque problema sui limiti che non sia del tutto banale.

Limiti delle funzioni razionali

Per $n > 0$, si ha intanto immediatamente:

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty; \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, \text{ se } n \text{ è pari} \\ -\infty, \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Consideriamo la funzione razionale intera

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty.$$

Analogamente, per una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

si ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}\right)} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}.$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{se è } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{se è } n=m\\ 0, & \text{se è } n<m\end{cases}\qquad \text{con } n=\mathrm{gr}P(x),\ m=\mathrm{gr}Q(x).$$

L'unico altro caso in cui si pone il problema della ricerca di limiti per le funzioni razionali è quello in cui x tende a x_0, con x_0 radice di $Q(x)$. Ma questo è un falso problema. Infatti:

- Se è $P(x_0)\neq 0$, la funzione tende a ∞.
- Se è $P(x_0)=0$, sia $P(x)$ che $Q(x)$ sono divisibili per $(x-x_0)$. Siccome per noi deve essere $x\neq x_0$, possiamo semplificare la frazione e ricominciare daccapo.

ESEMPI. 1) Si ha:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-17x^2+11}{8x^2-41x+45}=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{4x^3-6x^2+2}=0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^3+1}{3x^4-x^2+2x}=\frac{2}{3}.$$

2) Si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-8x^2+1}{x^2-1}=\infty;\qquad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x-5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-5}{x+1}=-1.$$

Limiti relativi alle funzioni circolari

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=2$	$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

Cominciamo con il primo. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari; basta dunque cercarne il limite per x che tende a 0 da destra; è inoltre lecito supporre $0<x<\frac{\pi}{2}$. Per tali x si ha

$$\sin x<x<\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\ \Leftrightarrow\ 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \Leftrightarrow\ 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

La tesi segue ora subito dal Teorema del confronto, dato che la funzione $\cos x$, essendo continua, tende a 1 per $x\to 0$.

Per il secondo limite, si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$.

Passiamo al terzo. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1.$$

Si è, ovviamente, posto $u=\arcsin x$ e si è applicato il Teorema sul limite delle funzioni composte. La cosa è lecita, dato che, per $x\neq 0$ è $\arcsin x\neq 0$.

Il quarto limite si prova in modo perfettamente analogo.

Si ha poi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Il sesto limite non ci dà problemi: $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2.$

Passiamo al settimo limite. Cerchiamo intanto il limite per $x\to 0^+$ e supponiamo $0<x<\frac{\pi}{2}$. Si ha:

$$0<\frac{x-\sin x}{x^2}<\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2\cos x}=\frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{\sin x}{\cos x}\to 0.$$

Per il Criterio del confronto, questo limite è 0. Essendo la funzione dispari, essa tende a 0 anche per $x\to 0^-$.

L'ultimo limite non può, per ora, essere giustificato. Lo faremo più avanti, quando avremo a disposizione le derivate. Ma è importante averlo già a disposizione.

ESEMPI. 3) Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3$. (Basta porre $3x=u$ e applicare il Teorema sul limite delle funzioni composte.)

4) Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{x}{\arcsin x}=1.$

Limiti relativi alle funzioni esponenziali e logaritmiche

Cominciamo col provare che è

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.}$$

Ricordiamo che il simbolo $[x]$ indica la parte intera del numero reale x e che è $x-1<[x]\le x<[x]+1$.

Sappiamo inoltre che è $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Ora, per $x>0$, si ha:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right);$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x\ge\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{-1}.$$

È dunque:

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{-1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right).$$

Per il Criterio del confronto, si ha intanto $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Sia ora $x < -1$. Si ha:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right),$$

con $y = -(x+1)$. Per $x \to -\infty$, è $y \to +-\infty$ e … il gioco è fatto.

Stabiliamo ora i seguenti limiti:

$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$

Cominciamo dal primo. Posto $y = \frac{1}{x}$ e tenuto conto della continuità del logaritmo, si ha:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to0}\log(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

Per il secondo, basta osservare che è $\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}\frac{\log(1+x)}{x}$.

Veniamo al terzo limite. Si ponga $e^x - 1 = u$, da cui $x = \log(1+u)$. Per $x \to 0$, si ha $u \to 0$, con $u \neq 0$ se è $x \neq 0$. È dunque:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{u\to0}\frac{u}{\log(1+u)} = 1.$$

Per l'ultimo limite, si ha: $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \log a\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a} \to \log a.$

Ciò spiega perché il numero e sia la base più naturale per esponenziali e logaritmi.

ESEMPI. 5) Si ha: $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x} =$

$$= \lim_{x\to0} a\frac{e^{ax}-1}{ax} + \lim_{x\to0} b\frac{1-e^{bx}}{bx} = a - b.$$

6) Si ha: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{(1/n)\log(x+1)}-1}{x} =$

$$= \frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{e^{(1/n)\log(x+1)}-1}{(1/n)\log(x+1)}\,\frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{n}.$$

Questo risultato si generalizza immediatamente. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\,.$$

E ancora:

Caso $a>1$; con p reale positivo e n naturale positivo				
$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}a^x x^n=0$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0$	$\lim_{x\to 0}x^p\log_a x=0$
Caso $0<a<1$; con p reale positivo e n naturale positivo				
$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x}=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$	$\lim_{x\to+\infty}a^x x^p=0$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0$	$\lim_{x\to 0}x^p\log_a x=0$

Primo limite. Cominciamo col provare che, per $a>1$, se è $n\in\mathbb{N}^+$, si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$. Infatti, essendo $a=1+h$, con $h>0$, si ha:

$$\frac{a^n}{n}=\frac{(1+h)^n}{n}=\frac{1+nh+\binom{n}{2}h^2+K}{n}\text{, con } K>0.$$

È dunque

$$\frac{a^n}{n}=\frac{(1+h)^n}{n}>\frac{1+nh+\binom{n}{2}h^2}{n}=\frac{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2}{n}\to+\infty,$$

dato che il numeratore dell'ultima frazione ha grado maggiore del denominatore.

Passiamo al caso $x\in\mathbb{R}$ e sfruttiamo l'uguaglianza $\frac{a^x}{x}=\frac{a^x}{a^{[x]}}\frac{a^{[x]}}{[x]}\frac{[x]}{x}$. Si ha; $\frac{a^x}{a^{[x]}}\geq 1$; $1\geq\frac{[x]}{x}>\frac{x-1}{x}$, da cui $\frac{[x]}{x}\to 1$; $\frac{a^{[x]}}{[x]}\to+\infty$, dato che, se $x\to\infty$, fa lo stesso anche $[x]$.

Secondo limite. Si ha: $\frac{a^x}{x^p}=\left[\frac{(a^{1/p})^x}{x}\right]^p\to+\infty$.

Terzo limite. Si ha: $\lim_{x\to-\infty}a^x x^n=\lim_{y\to+\infty}\frac{(-y)^n}{a^y}=0$. (Ovviamente, si è posto $y=-x$.)

Quarto limite. Ponendo $\log_a x=u$, si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{(a^u)^p}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{(a^p)^u}=0$.

Quinto limite. Posto ancora $\log_a x=u$, si ha $\lim_{x\to 0}x^p\log_a x=\lim_{u\to-\infty}u(a^p)^u=0$.

Passiamo agli ultimi limiti. Si ponga $b=\frac{1}{a}$ (> 1) e $y=-x$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xb^x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{b^y}{-y}=-\infty;\qquad\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n b^x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{b^y}{(-y)^n}=\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}a^x x^p=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{b^x}=0;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\log_b x}{x^p}=0;\quad\lim_{x\to 0}x^p\log_a x=-\lim_{x\to 0}x^p\log_b x=0.$$

Stabiliamo tre limiti notevoli riguardanti la funzione $n!$ (cfr. Cap. 3, §2, pg. 43).

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^p} = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \quad a > 0$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Primo limite. Se è $p \le 0$, la tesi è ovvia. Sia dunque $p > 0$. Supponiamo, intanto, che p sia un numero naturale. Per $n > p$, si ha:

$$\frac{n!}{n^p} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-p+1}{n}(n-p)!.$$

I primi p fattori tendono a 1, l'ultimo a $+\infty$; in questo caso la tesi è raggiunta. Se p non è un numero intero, la tesi segue dal fatto che è

$$\frac{n!}{n^p} > \frac{n!}{n^{[p]+1}} \to +\infty.$$

Secondo limite. Se è $a \le 1$, la tesi è ovvia. Sia dunque $a > 1$. Fissiamo un $n' > a$ e poniamo $K = \frac{n'!}{a^{n'}}$. Si ha:

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{n}{a}\frac{n-1}{a}\frac{n-2}{a}\cdots\frac{n'+1}{a}K > \frac{n}{a}K \to +\infty.$$

Terzo limite. Si ha:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n} \le \frac{1}{n} \to 0.$$

Segnaliamo, in fine altri due limiti notevoli molto utili, dei quali non riportiamo però la dimostrazione.

Formula di Stirling	Formuma di Wallis
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2\pi n}} = 1$

ESEMPI. 7) Si ha $\lim_{x\to+\infty} (2x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$

8) Si ha: $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0.$$

9) Si ricerchi il $\lim_{x\to-\infty} x^2(\sqrt[4]{x^4+x} - \sqrt[4]{x^4-x})$. È lecito supporre $x < 0$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2(\sqrt[4]{x^4+x} - \sqrt[4]{x^4-x}) = \lim_{x\to-\infty} |x|^3\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^3}}\right) =$$

$$= -\lim_{u\to 0^-} \frac{\sqrt[4]{1+u} - \sqrt[4]{1-u}}{u} = -\lim_{u\to 0^-} \left(\frac{\sqrt[4]{1+u} - 1}{u} + \frac{-1 + \sqrt[4]{1-u}}{-u} \right) = -2\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

10) Si voglia calcolare il $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(2x \log\frac{x+1}{x+2}\right)$.

Avendosi

$$\lim_{x\to+\infty} 2x \log\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} 2x \log\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)}{-\frac{1}{x+2}} \frac{-2x}{x+2} = -2,$$

e data la continuità della funzione esponenziale, il limite cercato è e^{-2}.

11) Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2(2n)\pi}} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} \frac{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\sqrt{\pi n}}{\pi n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = +\infty.$$

12) Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2\pi n}\,\frac{n}{e} = +\infty.$$

§ 7. I TEOREMI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI CONTINUE

In questo paragrafo stabiliremo tre importantissimi risultati riguardanti le funzioni continue. Partiamo dal seguente

PROBLEMA. Sia data una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Ci chiediamo:
– È vero che, se f assume in E due dati valori, allora assume in E anche tutti quelli fra essi compresi?
– È vero che f assume in E un valore massimo e uno minimo?
Se la risposta è negativa, quali condizioni si possono dare su f e su E in modo da renderla positiva?

La risposta alle prime due domande è effettivamente negativa. Basta infatti considerare la funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Questa non ha né massimo né minimo e non assume mai il valore 0, pur assumendone di negativi e di positivi. Vediamo dunque di stabilire delle condizioni sufficienti per il verificarsi delle nostre richieste.

TEOREMA 21. *(Degli zeri) - Siano $I = [a, b]$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con $f(a) = \alpha < 0$ [> 0] e $f(b) = \beta > 0$ [< 0]. Allora esiste almeno un punto $\xi \in I$ tale che $f(\xi) = 0$.*

DIM. Supponiamo $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Per comodità, ribattezziamo l'intervallo I ponendo $I = I_0 = [a_0, b_0]$ e diciamo m_0 il suo punto medio. Se è $f(m_0) = 0$, abbiamo finito. Se è $f(m_0) \neq 0$, in uno e uno solo dei due sottointervalli $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$ f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Ribattezziamo questo sottointervallo con $I_1 = [a_1, b_1]$. A questo punto, ricominciamo daccapo. Diciamo m_1 il punto medio di I_1. Se è $f(m_1) = 0$, abbiamo finito. Se è $f(m_1) \neq 0$, in uno e uno solo dei due sottointervalli $[a_1, m_1]$ e $[m_1, b_1]$ f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Ribattezziamo questo sottointervallo con $I_2 = [a_2, b_2]$, … e così via. Se dopo un numero finito di passi troviamo un punto dove f si annulla, abbiamo finito. Se ciò non accade, si ottiene una successione $(I_n)_n$ di intervalli chiusi, per costruzione, e decrescenti per inclusione, ossia tali che $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ In ciascuno degli I_n f assume, agli estremi, valori di segno opposto. Se si pone $l = b - a$, l'ampiezza dell'intervallo n - imo è $l_n = \frac{l}{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto ξ appartenente a tutti gli I_n. Vogliamo provare che è $f(\xi) = 0$. Supponiamo, per assurdo, che sia $f(\xi) > 0$ [< 0]. Essendo f continua, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno U di ξ, con $U =]\xi - \delta, \xi + \delta[$, in cui f è positiva [negativa]. Ora, preso un n per cui sia $\frac{l}{2^n} < \delta$, si ha $I_n \subset U$. Si ottiene così un assurdo, dato che, per costruzione, f cambia segno in I_n. ∎

TEOREMA 22. *(Di connessione) - Siano $I = [a, b]$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in I ogni valore compreso tra f(a) e f(b).*
Da ciò segue che: *Una funzione continua muta intervalli in intervalli.*

DIM. Sia, per esempio, $f(a) = \alpha < f(b) = \beta$ e fissiamo un γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Consideriamo la funzione $g: I \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - \gamma$. Anche g è una funzione continua sull'intervallo I e si ha $g(a) = \alpha - \gamma < 0$ e $g(b) = \beta - \gamma > 0$. Per il Teorema degli zeri, esiste un punto $\xi \in I$ tale che $g(\xi) = 0$, da cui $f(\xi) = \gamma$. ∎

Riesaminiamo i Teoremi 10 e 16 del Capitolo 4. La funzione f definita da $f(x) = x^n$ è continua in $[0,+\infty[$, assume il valore 0 in 0 ed è superiormente illimitata. Fissato un $\alpha > 0$, esiste un punto $b > 0$ con $f(b) > \alpha$. Dunque in f assume in $[0, b]$ anche il valore α e lo assume una volta sola, dato che si tratta di una funzione crescente. In modo perfettamente analogo si prova che la funzione a^x, con $0 < a \neq 1$, assume una e una sola volta tutti i valori positivi.

Se la funzione non è continua o se il dominio non è un intervallo, la tesi del teorema di connessione (e di quello degli zeri che ne è un caso particolare) può cadere in difetto.

ESEMPI. 1) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \setminus (0) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Questa è una funzione continua, ma non è definita su un intervallo; assume valori positivi e negativi, ma non si annulla mai.

2) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \geq 0 \\ -1, & \text{se è } x < 0 \end{cases}$. Questa funzione è definita su un intervallo, ma non è continua in 0; assume valori positivi e negativi, ma non si annulla mai.

3) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{se è } x \neq 0 \\ 0, & \text{se è } x = 0 \end{cases}$. Questa funzione è definita su un intervallo, ma non è continua in 0. Proviamo che per essa sus-

siste comunque la tesi del teorema di connessione; ciò mostra che il detto teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria.

Fissiamo due numeri reali a e b, con $a < b$. Se è $f(a) = f(b)$ non c'è niente da dimostrare. Sia dunque $f(a) \neq f(b)$ e sia γ un valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. Dobbiamo provare che esiste un c compreso fra a e b dove f assume il valore γ. Se è $0 < a$ oppure $b < 0$, la tesi segue dal Teorema di connessione, dato che f è continua in $[a, b]$. Sia dunque $a < 0 < b$. Esiste un numero naturale n per cui è $\frac{1}{n\pi} < b$. Nell'intervallo $\left[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right]$ la funzione f assume tutti i valori compresi fra -1 e 1 e quindi anche il valore γ. Lo stesso ragionamento si applica anche alla restrizione di f a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che è continua ma non definita su un intervallo.

Ricordiamo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è detto compatto se è chiuso e limitato. Ricordiamo anche che (Teorema 4): *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se ogni successione di elementi di E ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di E.*

Teniamo inoltre presente che

LEMMA 23. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato C di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo.*

DIM. Essendo C limitato esistono $\inf C = m$ e $\sup C = M$ con m e M numeri reali. Se fosse $m \notin C$ [$M \notin C$], questo, per la seconda proprietà dell'estremo inferiore [superiore] sarebbe un punto di accumulazione per C, ma allora dovrebbe appartenere a C, visto che l'insieme è chiuso. Assurdo. ∎

TEOREMA 24. *(Di Weierstrass) - Siano E un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e $f: E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in E un valore minimo e uno massimo.* ∎

DIM. Proviamo che $f(E)$ è compatto. Prendiamo una successione $(y_n)_n$ di punti di $f(E)$. Per ogni indice n, esiste un $x_n \in E$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo E compatto, la successione $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x^* \in E$. Per la continuità di f; la sottosuccessione $(f(x_{n_k}))_k = (y_{n_k})_k$ di $(y_n)_n$ converge a $f(x^*) \in f(E)$. Dunque $f(E)$ è compatto. La tesi segue ora dal Lemma 23. ∎

ESEMPIO. 4) Consideriamo la funzione $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 + \sqrt{1 + x}}$. È immediato che f è continua e assume il valore minimo 0. Dal Teorema di Weierstrass segue che f assume anche un valore massimo, anche se constatarlo direttamente non è del tutto banale.

Se la funzione non è continua o se il dominio non è compatto, la tesi del Teorema di Weierstrass può cadere in difetto.

ESEMPI. 5) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \setminus (0) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. È una funzione continua, ma non è definita su un insieme compatto; non ha né massimo né minimo.

6) Consideriamo la funzione $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \text{tg}x, & \text{se è } x \neq \pi/2 \\ 0, & \text{se è } x = \pi/2 \end{cases}$. Questa è una funzione definita su un insieme compatto, ma non è ivi continua. Essa ha minimo, ma non ha massimo.

7) Consideriamo ancora la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se è } x \geq 0 \\ -1, & \text{se è } x < 0 \end{cases}$. Questa funzione non è definita su un insieme compatto e non è continua in 0; tuttavia assume un

valore massimo e uno minimo. Anche il Teorema di Weierstrass esprime dunque una condizione sufficiente ma non necessaria.

Consideriamo ora le due funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$. Sappiamo che esse sono entrambe continue. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ che possiamo pensare minore di1, e cerchiamo, per ogni x_0 reale, un $\delta > 0$ che soddisfi alla condizione di continuità. Sappiamo che, nel caso della funzione $\sin x$, basta prendere $\delta = \varepsilon$.

Facciamo i conti per la funzione x^2 e partiamo da un $x_0 > 1$. Se è $|x - x_0| < 1$, si ha:

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,(x + x_0) \geq |x - x_0|\,(2x_0 - 1).$$

Se è $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, deve essere anche $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2x_0 - 1}$. Dato ε, si trova che il δ corrispondente deve essere minore o uguale a $\dfrac{\varepsilon}{2x_0 - 1}$ che tende a 0 al tendere di x_0 a $+\infty$. Si vede che, a differenza di prima, ora δ dipende non solo da ε, ma anche da x_0. Anzi, al tendere di x_0 a infinito, δ tende a 0. Non c'è dunque un δ che, dato ε, vada bene per tutti gli x_0.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua in E* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in E$, da $|x - x_0| < \delta$ segue $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Siccome questa condizione deve valere per *ogni* $x_0 \in E$, il punto x_0 non ha un ruolo diverso da quello di x. Dunque la condizione di continuità uniforme può essere così riformulata:

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua in E* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in E$, da $|x_1 - x_2| < \delta$ segue $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. In simboli:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x_1 \in E)(\forall\, x_2 \in E)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua su E è ivi continua, mentre non sussiste il viceversa. Le funzioni x, $\sin x$ sono uniformemente continue, mentre si è visto che la funzione x^2, non lo è. Si vede che non è uniformemente continua nemmeno la funzione $\dfrac{1}{x}$. (Esercizio!)

Sussiste il seguente risultato del quale tralasciamo la dimostrazione.

TEOREMA 25. *(Di Heine) - Ogni funzione continua definita su un insieme compatto è uniformemente continua.* ∎

Anche il Teorema di Heine dà una condizione solo sufficiente per l'uniforme continuità.

ESEMPIO. 8) Proviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty[$. Per $x_0 \geq 1$ si ha

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{2},$$ che è $< \varepsilon$ se e solo se è $|x - x_0| < 2\varepsilon$.

Dunque la f è uniformemente continua in $[1, +\infty[$. Essa è uniformemente continua anche in $[0, 1]$ per il Teorema di Heine. Mettendo assieme questi due risultati, si prova facilmente che la f è uniformemente continua su tutto $[0, +\infty[$. Ne lasciamo la verifica a chi studia.

§ 8. E S E R C I Z I

1) La funzione $f(x) = \dfrac{x + 2}{|x| - 2}$ non è definita in due punti di $\mathbb{R}$. Per ciascuno di essi, si veda se è possibile prolungare f per continuità.

2) Cosa può dirsi circa la continuità di una successione?

3) Determinare, attraverso l'individuazione dei punti di annullamento, i segni delle seguenti funzioni (continue):

$$x^3 - 3x^2; \quad \frac{x(x - 1)}{(x + 2)^3}; \quad (x - 1)\cos x; \quad (x - \pi)\sin^2 x; \quad (3 - 2\mathrm{srctg}\,x)\,\mathrm{arctg}\,x; \quad x + 2\sqrt{x^2 - 6}.$$

4) Sfruttando la definizione di limite, si constati che è:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2} = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{1 - \sqrt{n}} = -2; \quad \lim_{n\to+\infty} \left[n - \sqrt{n^2 + 2}\right] = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n + 1} = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 1}{2n} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2} \frac{2x - 1}{x + 1} = 1.$$

5) Si ricerchino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + \mathrm{arctg}\,x); \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3x^3}{x + 2x^3}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 2}; \quad \lim_{x\to\infty} x\,\arcsin\frac{1}{x}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x\sin\frac{\sin x}{x}}{\sin x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\mathrm{arctg}\,x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{arctg}\,x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x\cos x}{(\mathrm{arctg}\,x)^2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{x\sin(\pi x)}}; \quad \lim_{x\to\pi/2} \frac{\mathrm{tg}\,x}{2x - \pi};$$

$$\lim_{x\to\pi/2} (2x - \pi)\mathrm{tg}\,x; \quad \lim_{x\to\pi/2} \mathrm{tg}^2 x\,(1 - \sin x); \quad \lim_{x\to 1} \mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}(x - 1); \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{arctg}\,x)^2}{\sin x - \sqrt{1 - \cos x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x - x^2\mathrm{tg}\,x}{3x - \mathrm{tg}\,x + \sin^2 x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x - \sin x}{\sin^3 x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x} - x^2}{\sqrt{1 - \cos x} + x^2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x};$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 1}); \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}); \quad \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}); \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}); \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{1/x};$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\log x - 1}{x - e}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - 5^x}{1 - e^x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\log(x + 1)}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}; \quad \lim_{x\to 0} x^{\log x};$$

$$\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x}; \quad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x - 1}; \quad \lim_{x\to 0} x^x; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}; \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x}; \quad \lim_{x\to+\infty} \log_{x^2}(x + 1); \quad \lim_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x + 1} - \sin\sqrt{x - 1});$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\log(e^x - 1)};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}\right)^x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1 + \sin^2 x)}{1 - \cos x}.$$

6) Si dimostri che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\cos x;\quad \lim_{x\to\infty} x\sin x;\quad \lim_{x\to\infty}\sin x^2;\quad \lim_{x\to 0} x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}.$$

7) Si dimostri il seguente Teorema:

Se f: $I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione strettamente monotona ed assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b), allora f è continua.*

8) Si dimostri che una funzione continua, periodica e non costante ha minimo periodo.

9) Si dimostri che la funzione f: $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua.

10) Si provi che la composta di due funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

11) Sua f una funzione continua di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta$. Si dimostri che f assume tutti i valori compresi (in senso stretto) tra α e β.

12) Sia f: $I =]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$. Si dimostri che allora f assume in I un valore minimo.

13) Sia f: $I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona definita sull'intervallo I e sia x_0 un punto interno di I. Si dimostri che esistono i limiti di f per x che tendere a x_0 da destra e per x che tendere a x_0 da sinistra. Si dica che relazione c'è fra questi due limiti e il valore $f(x_0)$.