

II NUOTO AGONISTICO

Problema reale

Un nuotatore che si allena per partecipare a delle gare di nuoto, prima di tutto si esercita a muoversi nell'acqua, seguendo le regole imposte dalla federazione per lo *stile* (o gli stili) che ha scelto, in modo da minimizzare il tempo che impiega a percorrere una data distanza, quella della gara alla quale intende partecipare. Deve quindi imparare a nuotare il più velocemente possibile, compatibilmente col fatto che deve arrivare fino al traguardo. Può prevedere che tempo farebbe su una distanza diversa, se si allenasse su di essa?

Osservazione

In realtà un nuotatore è in grado di mantenere una data velocità per un tempo che è tanto più breve quanto maggiore è la velocità, dopo di che è costretto a rallentare improvvisamente e visibilmente, perchè gli vengono meno le forze e il fiato. Diamo per scontato che il proprio record personale su una data distanza sia stabilito dal nuotatore quando riesce a mantenere la stessa velocità per tutta la distanza, e all'arrivo ha esaurito le proprie forze (se infatti arrivasse ancora *fresco*, vorrebbe dire che avrebbe potuto tenere una velocità maggiore; se invece avesse esaurito le proprie forze prima dell'arrivo, sarebbe stato costretto a rallentare nell'ultimo tratto). Ci riferiremo a questa come alla *situazione ideale* e diremo *velocità ideale*, $V(d)$, la velocità relativa alla distanza d e $T(d)$ il record personale del nuotatore sulla distanza d . Quando il nuotatore si allena su una data distanza, insegna quindi al proprio corpo a *scegliere automaticamente* la propria velocità ideale relativa a quella distanza. Questo richiede tempo, e il nuotatore saprà qual'è il proprio record su quella distanza soltanto alla fine dell'allenamento specifico per quella distanza.

Si pone ora il problema della scelta della distanza (o delle distanze) sulla quale gareggiare. Una scelta oculata può essere fatta se si conoscono i record personali degli avversari sulle varie distanze (e questo è facile), e li si confrontano con i propri record personali. Ma è proprio questo il punto: visto che è impossibile allenarsi su tutte le distanze, e che l'allenamento su una distanza va a scapito dell'allenamento su un'altra, bisognerebbe essere in grado di rispondere alla seguente domanda: se conosco il mio record personale su una data distanza, perchè mi sono allenato su quella, posso dire quale sarebbe il mio record personale su un'altra, se mi allenassi su di essa? Se potessi rispondere alla domanda, sarei in grado di decidere in modo consapevole su quale o quali distanze cominciare ad allenarmi in vista delle gare future.

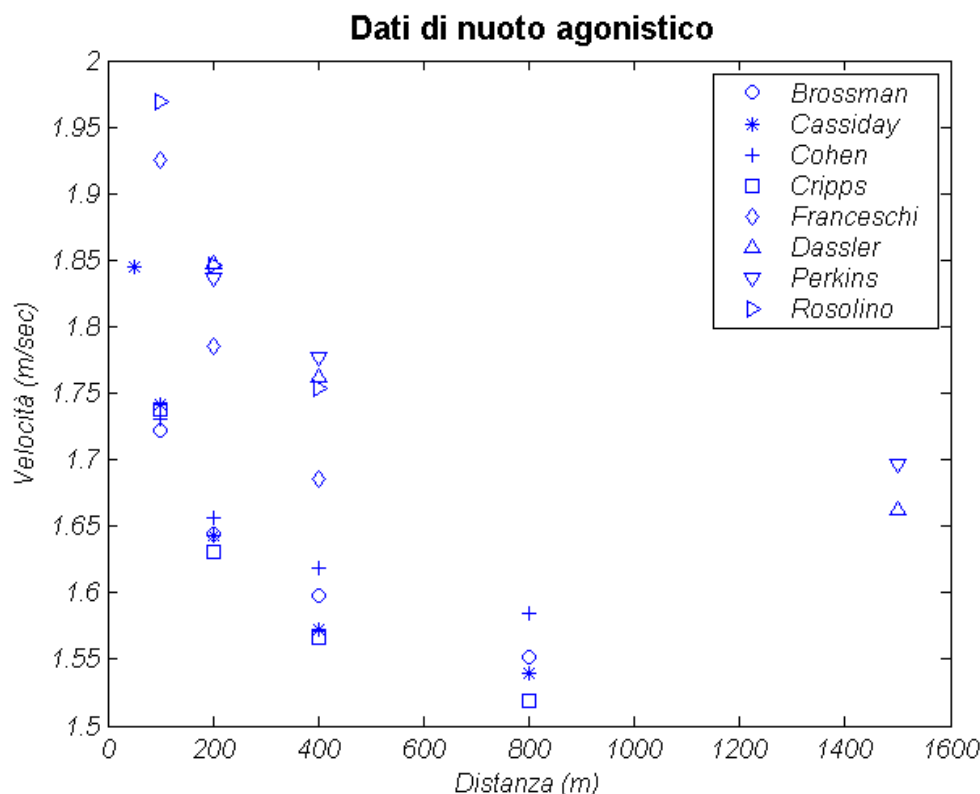
Altrimenti devo accontentarmi di ragionamenti qualitativi del tipo: sui 200 metri sono bravo, ma sui 400 sono tra i primi del mondo, quindi devo smettere di allenarmi sui 200, e tentare piuttosto gli 800: magari divento campione del mondo anche sugli 800!

I record personali di alcuni campioni di nuoto su diverse distanze sono riportati nella tabella seguente:

| Nuotatore | distanza | tempo | velocità |
|--|----------|--------|----------|
| Bienesse Karin (Gdr) (DDR o BRD ?) | 50 | 26.11 | 1.9150 |
| | 100 | 56.15 | 1.7809 |
| | 200 | 121.39 | 1.6476 |
| | 400 | 259.39 | 1.5421 |
| Brian Goodell (USA) | 200 | 110.62 | 1.8080 |
| | 400 | 231.56 | 1.7274 |
| | 1500 | 924.64 | 1.6223 |
| Brighitta Enith (Ned) | 100 | 56.61 | 1.7665 |
| | 200 | 126.15 | 1.5854 |
| | 400 | 255.06 | 1.5683 |
| Brossman Juliane (Gdr) | 100 | 58.08 | 1.7218 |
| | 200 | 121.61 | 1.6446 |
| | 400 | 250.33 | 1.5979 |
| | 800 | 515.46 | 1.5520 |
| Cassiday Stacy (USA) | 50 | 27.10 | 1.8450 |
| | 100 | 57.44 | 1.7409 |
| | 200 | 121.72 | 1.6431 |
| | 400 | 254.45 | 1.5720 |
| Caulkins Tracy (USA) | 800 | 519.61 | 1.5396 |
| | 50 | 26.22 | 1.9069 |
| | 100 | 56.57 | 1.7677 |
| | 200 | 121.04 | 1.6523 |
| Cohen Tiffany (USA) | 400 | 256.13 | 1.5617 |
| | 100 | 57.77 | 1.7310 |
| | 200 | 120.77 | 1.6560 |
| | 400 | 247.10 | 1.6188 |
| Cripps Annabelle (Gbr) | 800 | 504.95 | 1.5843 |
| | 100 | 57.53 | 1.7382 |
| | 200 | 122.68 | 1.6303 |
| | 400 | 255.33 | 1.5666 |
| | 800 | 526.68 | 1.5189 |

| Nuotatore | distanza | tempo | velocità |
|--------------------------------|----------|--------|----------|
| Dassler Uwe (Gdr) | 200 | 108.26 | 1.8474 |
| | 400 | 226.95 | 1.7625 |
| | 1500 | 902.30 | 1.6624 |
| Demont Rich (USA) | 100 | 51.16 | 1.9547 |
| | 200 | 111.62 | 1.7918 |
| | 400 | 238.18 | 1.6794 |
| Forrester Billy (USA) | 100 | 51.84 | 1.9290 |
| | 200 | 111.02 | 1.8015 |
| | 400 | 233.66 | 1.7119 |
| Franceschi Giovanni (Ita) | 100 | 51.95 | 1.9249 |
| | 200 | 112.04 | 1.7851 |
| | 400 | 237.39 | 1.6850 |
| Friederich Heike (Gdr) | 100 | 55.71 | 1.7950 |
| | 200 | 117.55 | 1.7014 |
| | 400 | 245.94 | 1.6264 |
| | 800 | 508.91 | 1.5720 |
| Gaines Rowdy (USA) | 100 | 49.36 | 2.0259 |
| | 200 | 109.93 | 1.8193 |
| | 400 | 235.89 | 1.6957 |
| Lamberti Giorgio (Ita) | 100 | 49.24 | 2.0309 |
| | 200 | 109.93 | 1.8193 |
| | 400 | 235.89 | 1.6957 |
| Northway Doug (USA) | 100 | 51.68 | 1.9350 |
| | 200 | 111.65 | 1.7913 |
| | 400 | 236.48 | 1.6915 |
| Perkins Kieren (Aus) | 200 | 108.92 | 1.8362 |
| | 400 | 225.16 | 1.7765 |
| | 1500 | 883.90 | 1.6970 |
| Rosolino Massimiliano (Ita) | 100 | 50.80 | 1.9685 |
| | 200 | 108.32 | 1.8464 |
| | 400 | 228.11 | 1.7535 |
| Woidat Artur (Pol) | 100 | 51.19 | 1.9535 |
| | 200 | 107.96 | 1.8525 |
| | 400 | 227.34 | 1.7595 |

Riportiamo in un grafico i dati relativi ad alcuni nuotatori.



Notiamo una certa regolarità: all'aumentare della distanza la velocità diminuisce, in un modo che è qualitativamente lo stesso per tutti i nuotatori. Questo fa supporre che esista una “legge fisica” che possa spiegare i dati, e quindi prevedere ad esempio quale sarà la velocità che un nuotatore potrà raggiungere sugli 800 metri, se si conosce quella che è capace di sviluppare sui 100 metri (vedremo che non è proprio così).

A partire da una trentina di anni fa, sulle riviste specializzate hanno cominciato a essere proposte delle *leggi*, che in realtà non sono che dei *fitting*, che permettono ad un nuotatore che conosce il proprio record personale su due distanze “consecutive”, di prevedere quale sarebbe il proprio record sulla distanza doppia della maggiore o metà della minore; indicando con s una distanza, e con ns una distanza pari a n volte s , si sono avute molte proposte, le principali delle quali sono

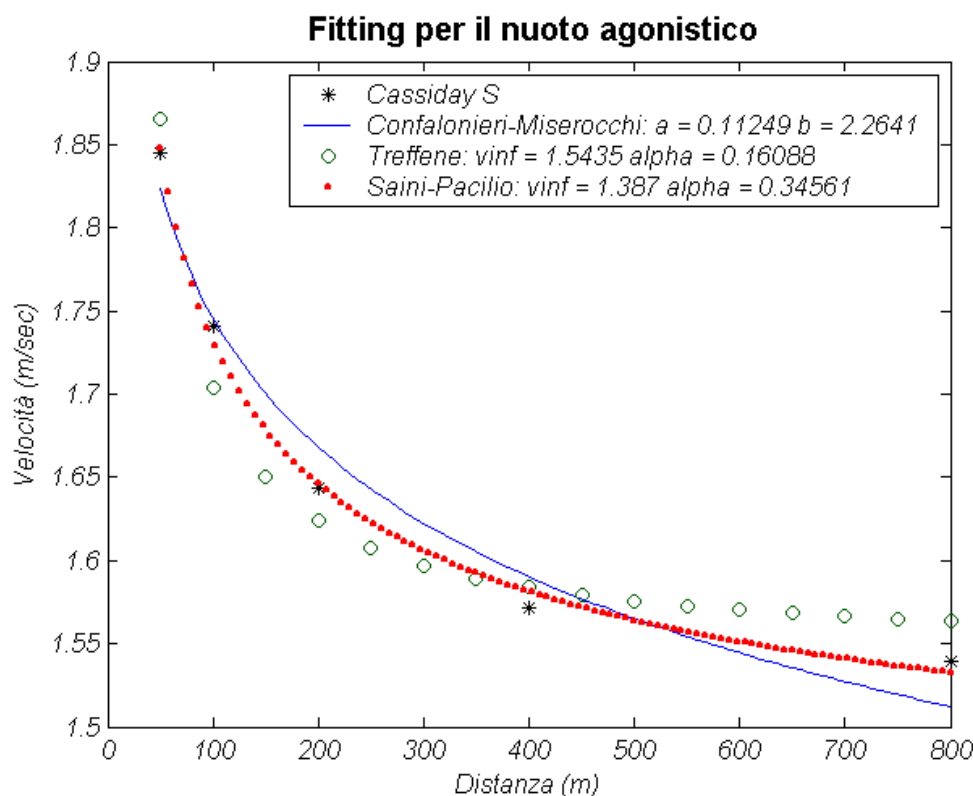
$$\text{Treffene (1979): } V_{4s} - V_{2s} = \frac{1}{2} [V_{2s} - V_s] \rightarrow V_s = V_\infty + \frac{\alpha}{s},$$

$$\text{Confalonieri e Misericocchi (1987): } V_{4s} - V_{2s} = [V_{2s} - V_s] \leftrightarrow V_s = b - a \log s,$$

$$\text{Saini e Pacilio (1999): } V_{4s} - V_{2s} = \frac{3}{4} [V_{2s} - V_s] \leftrightarrow V_s = \alpha s^{-0.415} + V_\infty,$$

I tre fitting possono ottenersi dalla legge $dV/ds = -A/s^\beta$, per $\beta = 2, 1, 1.415$.

La *bontà* dei fitting proposti è stata controllata con i dati dei nuotatori che hanno i record su 3 distanze diverse, determinando i coefficienti in modo che la linea passi per due dati, e controllando se passa “vicino” al terzo. Un modo più “matematico” di procedere è quello (usato per ottenere la figura relativa a Cassiday) di considerare tutti i dati e scegliere i parametri in modo che da minimizzare lo *scarto quadratico medio* tra i dati e le previsioni del fitting. Minore è lo scarto quadratico medio, migliore è il fitting.



Ad esempio, consideriamo il fitting di Treffene e i dati di Rosolino. Lo scarto quadratico tra i dati e il fitting è (con s in centinaia di metri)

$$S = (V_{\infty} + \alpha - 1.97)^2 + (V_{\infty} + \frac{\alpha}{2} - 1.85)^2 + (V_{\infty} + \frac{\alpha}{4} - 1.75)^2;$$

la coppia di valori V_{∞} , α che minimizzano S sono definiti dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial V_{\infty}} = 6V_{\infty} + 2\alpha \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] - 11.14 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{7}{2}V_{\infty} + 2\alpha \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right] - 6.660 = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 6V_{\infty} + \frac{7}{2}\alpha = 11.14, \\ \frac{14}{4}V_{\infty} + \frac{21}{8}\alpha = 6.66, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V_{\infty} = 1.69, \\ \alpha = 0.28. \end{cases}$$

Vediamo ora un modello molto semplice, basato sulle nostre conoscenze di fisiologia e di fisica. Di fisiologia poche: sappiamo che i muscoli di una persona sono in grado di sviluppare su un tempo breve, e quindi prima che il sangue abbia il tempo di “rifornirli” di energia, uno sforzo relativamente alto, come se avessero una data riserva di energia da spendere (*energia anaerobica*); inoltre sono in grado di sviluppare uno sforzo relativamente basso per un tempo “illimitato”, corrispondentemente al fatto che vengono riforniti di energia ad un dato ritmo massimo tramite la circolazione del sangue e la respirazione (*potenza aerobica*). Di fisica molte: sappiamo cosa sono forza, energia, potenza, e conosciamo le leggi relative. In questo contesto si parla di energia anaerobica e di potenza aerobica.

Processo ideale (modello di ordine zero)

Le ipotesi sono:

Il nuotatore può spendere la propria energia anaerobica, E_0 e usare la propria potenza aerobica W_0 .

Il nuotatore si muove con velocità costante sulla distanza della gara, in modo da consumare tutta l'energia di cui dispone, e questa è proporzionale all'energia spesa per vincere la resistenza al moto.

La resistenza che incontra è turbolenta.

Problema matematico

È dato dal bilancio dell'energia:

$$E_0 + W_0 t = \eta V^2 s$$

dove t è il tempo impiegato, quindi $s = V t$; la costante η è il coefficiente di viscosità, e include l'efficienza dell'atleta nel trasformare l'energia spesa in spinta. La relazione che determina V in funzione di s è quindi

$$E_0 + \frac{W_0 s}{V} = \eta V^2 s, \quad \rightarrow \quad V^3 - \frac{E_0}{\eta s} V - \frac{W_0}{\eta} = 0,$$

che è il problema della determinazione delle radici di un polinomio di terzo grado.

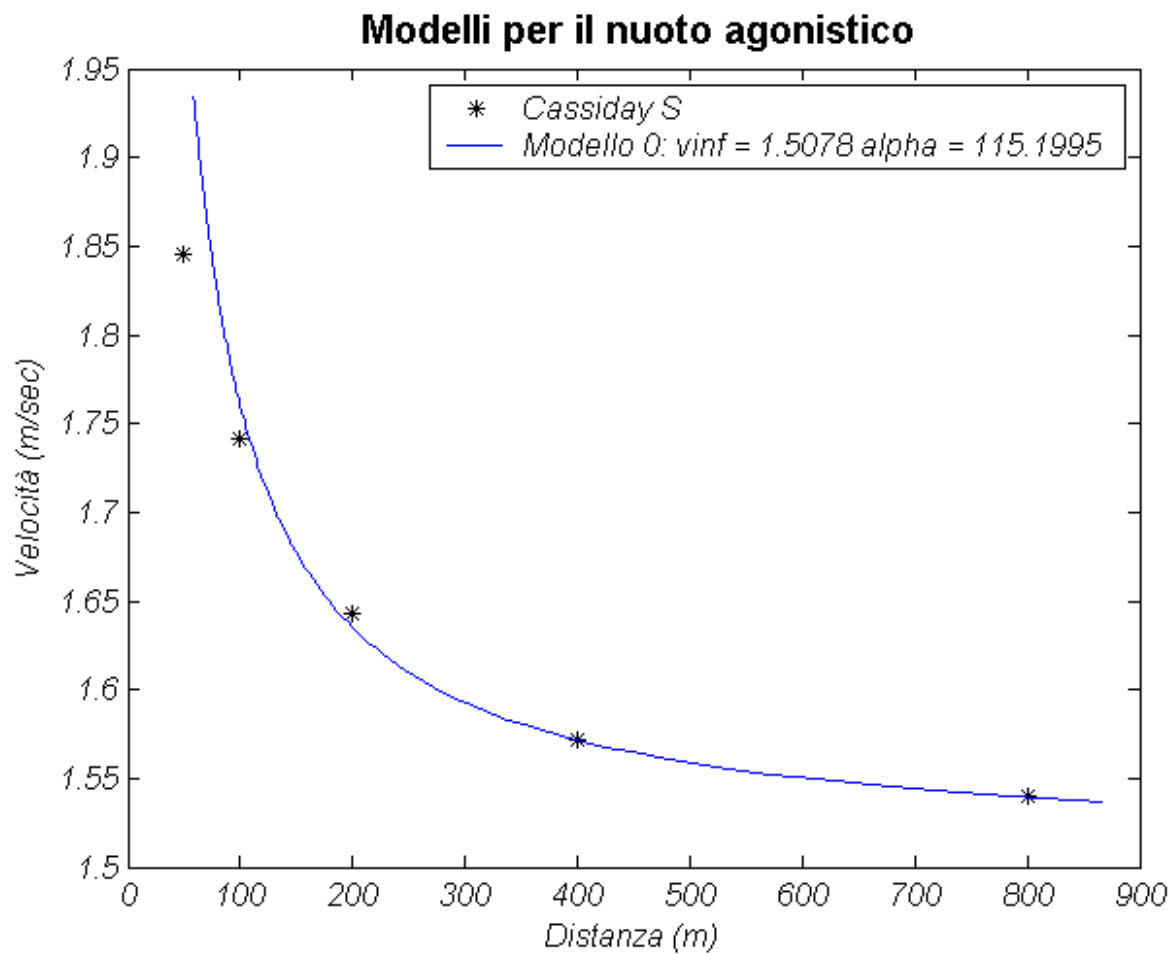
Soluzione

Anzichè tentare di trovare gli zeri del polinomio di terzo grado, conviene scrivere s in funzione di V ,

$$s = \frac{\alpha}{V^2 - V_\infty^3/V}, \quad \alpha = \frac{\eta}{E_0}, \quad V_\infty = \left[\frac{W_0}{\eta} \right]^{1/3},$$

e costruire la linea $V(s)$ disegnando $s(V)$.

Il risultato del modello è riportato in figura per la nuotatrice Stacy Cassidy (USA).



Discussione

Nota:

- 1.: Al diminuire della distanza la partenza diventa più importante.
- 2.: L'energia anaerobica non può essere consumata completamente in un tempo troppo breve.