

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 8

Esercizio 1. Si consideri E il campo di spezzamento di $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Si calcoli $[E; \mathbb{Q}]$ e si individui $Gal(E/\mathbb{Q})$.
2. Usando la corrispondenza di Galois si individuino i sottocampi di $E/\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Si consideri $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

1. Si dimostri che E è un'estensione normale su $\mathbb{Q}$.
2. Si calcoli $[E; \mathbb{Q}]$ e si individui $Gal(E/\mathbb{Q})$.
3. Usando la corrispondenza di Galois si individuino i sottocampi di $E/\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Usando il seguente criterio:

“Sia $q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio per cui esiste un numero s primo tale che s divide a_i per $i = 0, \dots, n-1$ ma s non divide a_n e s^2 non divide a_0 , allora $q(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ (Criterio di Eisenstein). ”

si dimostri che $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = (x^p - 1)/(x - 1)$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni numero primo p .

(Suggerimento: sostituire x con $x + 1$)