

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 7

Esercizio 1. 1. Si consideri in $\mathbb{Z}_7[x]$ il polinomio $p(x) = x^4 + 8x^2 + 16$; si trovi un'estensione di $\mathbb{Z}_7$ in cui $p(x)$ ammette una radice e se ne indichi il grado.

2. Si costruisca un campo di cardinalità 125.

3. Si dica quali fra i seguenti anelli sono campi:

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 1) \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1) \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4 + x^2 + 1)$$

4. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $1 - i\sqrt{3}$.

Esercizio 2. 1. Siano F un campo di caratteristica 0 e $f(x) \in F[x]$ un polinomio monico non costante. Siano $d(x) = \text{MCD}(f(x), f'(x))$ in $F[x]$ e $g(x) \in F[x]$ tale che $f(x) = g(x)d(x)$. Si dimostri che $g(x)$ ha le stesse radici di $f(x)$ in F e che $g(x)$ in F ha tutte radici semplici.

2. Siano F un campo di caratteristica p e $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile. Si dimostri che $f(x) = g(x^{p^e})$ dove $g(x)$ è un polinomio irriducibile e separabile. Si utilizzi questo per dimostrare che in un campo di spezzamento di $f(x)$ tutte le radici hanno molteplicità p^e .