Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 11

Esercizio 1.

1. Si dimostri che A_n (gruppo alternante su n elementi) è generato dai cicli di lunghezza 3.

2. Si dimostri che S_n è generato dalle trasposizioni $(i, i+1)$ per $i = 1, \dots, n-1$.

Esercizio 2. Si individuino in S_4 i sottogruppi che agiscono transitivamente su $\{1, 2, 3, 4\}$.

Esercizio 3. Sia F una campo di caratteristica diversa da 2. Si consideri $f(x) = x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 \in F[x]$. Si denotino r_1, r_2, r_3, r_4 le sue radici in $E = F(r_1, r_2, r_3, r_4)$ (campo di spezzamento di f(x)) e G_f il gruppo di Galois di f.

1. Consideriamo $H = \{Id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \leq S_4$ e siano $u_1 = r_1r_2 + r_3r_4$, $u_2 = r_1r_3 + r_2r_4$ e $u_3 = r_1r_4 + r_2r_3$. Si dimostri che $Inv(G_f \cap H) = F(u_1, u_2, u_3)$.

2. Sia $g(x) = (x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)$ verificare che $g(x) = x^3 - b_1x^2 + b_2x - b_3$ con:

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_1a_3 - 4a_4, \quad b_3 = a_1^2a_4 + a_3^2 - 4a_2a_4.$$

   e che $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso discriminante.

   ($g(x)$ è detta la cubica risolvente di $f(x)$)

3. Dimostrare che G_g è isomorfo a $G_f/(G_f \cap H)$.

4. Supponendo che $f(x)$ sia irriducucibile, dimostrare che:

   - se $G_f = S_4$ allora $|G_g| = 6$;
   - se $G_f = A_4$ allora $|G_g| = 3$;
   - se $G_f = H$ allora $G_g = \{1\}$;
   - se G_f è ciclico di ordine 4 allora $|G_g| = 2$;
   - se G_f è un 2-Sylow allora $|G_g| = 2$;

   (Osservazione: queste sono tutte le possibilità se G_f agisce transitivamente).

5. Supponiamo che $|G_g| = 2$, allora G_f è ciclico di ordine 4 se e solo se $f(x)$ è riducibile in $F(\sqrt{d})$ dove d è il discriminante di $f(x)$.

Esercizio 4. Si calcoli il gruppo di Galois di $x^4 + 3x^3 - 3x - 2 = 0$.

(Suggerimento. Si può usare il Lemma di Gauss: "Sia $q(x) = \mathbb{Z}[x]$ un polinomio non costante. Allora se $q(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ allora è irriducibile anche in $\mathbb{Q}[x]$.")

Esercizio 5. Si dimostri che per ogni gruppo finito G esiste un campo F ed E un'estensione di Galois di F tale che $Gal(E/F) \cong G$

Esercizio 6. Si risolva l'equazione $x^3 - 2x + 4 = 0$ usando le formule di Cardano.

Esercizio 7. Sia F un campo di caratteristica diversa da 2 e da 3. Si consideri la quartica generale $x^4 - t_1x^3 + t_2x^2 - t_3x + t_4 = \prod_{i=1}^{4}(x - x_i)$ in $F(t_1, t_2, t_3, t_4)$ dove x_i sono gli zeri della quartica.

1. Sostituendo x con $y + t_1/4$ si ottiene il polinomio $f(y) = y^4 + py^2 + qy + r$. Si calcolino p, q, r in funzione di t_1, t_2, t_3, t_4. Si denotino con $y_i = x_i - t_1/4$ gli zeri di $f(x)$. Si noti che $\sum_{i=1}^{4} y_i = 0$.

2. Dimostrare che la cubica risolvente di $f(x)$ è il polinomio $g(z) = z^3 - pz^2 + 4rz + (4pr - q^2)$ (vedi Esercizio 3).

3. Siano z_1, z_2, z_3 gli zeri di $g(z)$. Dimostrare che

$$Gal(F(y_1, y_2, y_3, y_4)/F(z_1, z_2, z_3)) = \{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

4. Determinare delle formule che esprimono le soluzioni di $f(y)$ in termini degli z_i e di radici quadrate di elementi in $F(z_1, z_2, z_3)$.

   (Osservazione: queste equazioni assieme alle equazioni di Cardano per le cubiche danno una soluzione generale per radicali delle quartiche)