

## Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 1

**Esercizio 1.** Sia  $\mathbb{D}_{2n}$  il gruppo diedrale di ordine  $2n$ .

1. Si dimostri che se  $n'$  divide  $n$  allora  $\mathbb{D}_{2n'}$  può essere considerato un sottogruppo di  $\mathbb{D}_{2n}$ .
2. Si dimostri che se  $n \geq 3$ , allora  $\mathbb{D}_{2n}$  non è abeliano.
3. Si individui il centro di  $\mathbb{D}_{2n}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $G$  un gruppo,  $H$  un sottogruppo di  $G$ ,  $S$  un sottoinsieme di  $G$  e  $g$  un elemento di  $G$ . Si verifichi che:

1.  $H^g$  è un sottogruppo di  $G$ ;
2.  $C_G(S)^g = C_G(S^g)$ ;
3.  $N_G(S)^g = N_G(S^g)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $G$  un gruppo che non ha sottogruppi propri non banali, si dimostri che allora è ciclico di ordine primo.

**Esercizio 4.** Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo, si dimostri che esiste una biezione fra laterali destri e sinistri di  $H$ .

**Esercizio 5.** Si consideri il seguente sottoinsieme di  $GL(2, \mathbb{C})$ .

$$Q = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si dimostri che  $Q$  con il prodotto di matrici è un gruppo non abeliano e che ogni suo sottogruppo è normale.