

Esercizi I Forma Fondamentale

1) Si consideri la seguente parametrizzazione locale di S^2 :

$$\varphi: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

a) Calcolare E, F, G rispetto a φ

b) Calcolare l'angolo individuato da un meridiano ed un parallelo nel loro punto di intersezione.

2) Dato $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi(u, v) = (u, v, u^4 + v^4)$

calcolare i coefficienti della I forma fondamentale di $\varphi(\mathbb{R}^2)$ rispetto alla parametr. locale φ .

3) Dato $\varphi: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

a) Calcolare E, F, G di $\varphi(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi))$ rispetto a φ

b) Dato $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare la lunghezza

delle curve $\gamma: [0, \pi] \rightarrow S$ date da
 $\gamma(t) = \varphi \left(e^{t \cot(\beta)/\sqrt{2}}, t \right)$

4) Dimostrare che una superficie di rotazione ammette un atlante con delle parametrizzazioni ortogonali.

5) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con parametrizzazione locale $\varphi(u, v)$ i cui coefficienti metrici soddisfino
 $E(u, v) = 1 \quad F(u, v) = 0$ per ogni u, v
Mostra che le v -curve coordinate tagliano su ogni u -curve coordinate segmenti di uguale lunghezza

Oss nell'esercizio 3 $\varphi(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi))$
è un aperto del cono

