Esercizi preparatori alla II provetta.

1) Sia $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Calcolare:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad \iint_D (x + 3y^2)\, dx\, dy, \quad \iint_D \frac{x + y}{x + 1}\, dx\, dy.$$

[Probabili risposte: $\frac{10}{3}$, 9 e 2 rispett.]

2) Sia D il semi-disco di centro l'origine e raggio 1 disposto nel primo e secondo quadrante. Calcolare i seguenti integrali:

$$\iint_D (x + y)\, dx\, dy, \quad \iint_D x\, dx\, dy, \quad \iint_D (y + 3)\, dx\, dy.$$

[Probabili risposte: $\frac{2}{3}$, 0 e $\frac{2}{3} + \frac{3\pi}{2}$ rispett.]

3) Sia R il parallelepipedo definito da:

$$R = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 1 \leq z \leq 2\}.$$

Calcolare:

$$\iiint_R xyz\, dx\, dy\, dz$$

[Probabile risposta: $\frac{3}{2}$]

4) Sia $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita da: $\phi(t) = (3t, 4t)$. Calcolare la lunghezza $\ell(\phi)$ di ϕ.

5) Sia $\phi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $\phi(t) = (\cos t\ \sin t, \sin^2 t, 2t)$. Calcolare $\ell(\phi)$.

6) Sia $\phi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $\phi(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, t)$. Calcolare $\ell(\phi)$.

7) Sia $\psi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da: $\psi(t) = (2\sin(3t), 2\cos(3t))$. Calcolare l'ascissa curvilinea di ψ.

8) Sia $\psi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da: $\psi(t) = (\sin(6t), \cos(6t), 4t)$. Calcolare l'ascissa curvilinea di ψ.

9) Sia $\phi(t) = (3\cos t\ \sin t, 3\sin^2 t, 4t)$ definita per $t \in [0, \pi/2]$. Calcolare:

$$\int_\phi z ds.$$

10) Calcolare

$$\int_\phi (x^2 + y^2)\, ds$$

dove $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ è definita da $\phi(t) = (3t, 2t)$.

11) Calcolare
$$\int_\phi 2x\,dx + (4y+3z)\,dy + 3y\,dz$$
lungo la curva $\phi(t) = (t^2, cos(t), t)$ con $t \in [0, \pi/2]$.

[Possibile risposta: $\frac{1}{16}\pi^4 - 2$]

12) Calcolare:
$$\int_\psi x^2\,dx + y\,dy$$
dove $\phi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ è definita da $\psi(t) = (t, \cos(t))$.

13) Sia $F(x,y) = (2x - 3y\sin(x), 4y + 3\cos(x))$. Dire se F è un campo vettoriale conservativo e calcolare il seguente integrale:
$$\int_\phi F(x,y) \cdot d\mathbf{r}$$
dove $\phi(t) = (\sin(t) + \cos(t), 3t^2)$ è definita per $t \in [0, \pi]$.

14) Sia $F(x,y,z) = (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + 1)$. Provare che F è un campo conservativo. Calcolare poi il seguente integrale:
$$\int_\phi yze^{xy}\,dx + xze^{xy}\,dy + (1 + e^{xy})\,dz$$
lungo la curva $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da $\phi(t) = (t^4 + 5t, 4(1-t), t^2)$.
Calcolare poi il rotore di F. Il risultato che si ottiene era prevedibile a priori, senza fare conti?

15) Sia $G(x,y,z) = xy\cos(yz)$. Sia $F := \nabla(G)$. Calcolare la divergenza di F.

[Risp. $-\cos(yz)z^2 - y^2\cos(yz)$]

16) Sia $F(x,y) = (\cos(xy) + \sin(xy), xy)$. Calcolare la divergenza e il rotore di F.

17) Sia $\Omega = \{1,2,3\}$ e sia $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ data da: $X(1) = -2,\ X(2) = 4,\ X(3) = 1$. Calcolare la variabile standardizzata che si ottiene da X. Sia poi $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $Y(1) = 1,\ Y(2) = 3,\ Y(3) = 5$. Calcolare la matrice di correlazione delle variabili normalizzate che si ottengono da X e Y.

18) Sia $\Omega = \{a,b,c\}$ e siano $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ date da $X(a) = 4,\ X(b) = 2,\ X(c) = 3$ e $Y(a) = 4,\ Y(b) = 9/2,\ Y(c) = 5$. Calcolare la retta di regressione di X e Y.