Esercizi di Ricapitolazione

Istituzioni di Matematiche II per Sc. Geologiche
A.A. 1999–2000

febbraio 2000

1) Da un'indagine è risultato che 480 studenti di una scuola elementare hanno il Q.I. distribuito nel seguente modo:

Q.I. :	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
freq. :	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

Trovare la media, la deviazione standard e la varianza del Q.I. dei 480 studenti, tracciare un istogramma per rappresentare i dati e trovare infine le frequenze relative dei Q.I.

2) Dati i seguenti due insiemi di numeri:
a) $12, 14, 5, 7, 11, 45, 18, 34, 23, 18$;
b) $17, 18, 16, 16, 18, 19, 20, 19, 21, 23$.
Quanto vale la media di tali dati? Quanto vale la deviazione standard? Perchè quest'ultima differisce nei due insiemi di dati?

3) Sia Ω un insieme costituito da una popolazione di cinque individui $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}$ e siano X_1, X_2 e X_3 le seguenti funzioni:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
X_1	2	4	4	3	1
X_2	5	10	9	6	3
X_3	16	11	13	13	17

Trovare la covarianza delle funzioni X_1 e X_2, di X_1 e X_3 e calcolare le relative rette di regressione. Tracciare su un grafico la retta di regressione di X_1 e X_3.
Calcolare la matrice di correlazione di X_1, X_2 e X_3.

4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$y'' - 2y' - 3y = x^2 + x; \quad y'' - 6y' + 3y = 2\sin(x);$$
$$y'' - 6y' + 3y = \cos(x); \quad y'' - 3y' = x^2 + 1; \quad y'' - 5y' + 4y = 4x - 1.$$

5) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 2y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 2y' - 2y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

6) Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 + y_2 - e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 + x\sin(x) \\ y_2' = -y_1 - 3x\cos(x) \end{cases}$$

7) Se una popolazione raddoppia ogni 10 anni e attualmente è costituita 100.000 individui, in quanto tempo raggiungerà i 10 milioni?

8) Il decadimento radioattivo del Carbonio-14 è di 0,01238% annuo. Qual è il suo tempo di dimezzamento?

9) Una certa sostanza radioattiva impiega 80.000 anni per decrescere del 75% della sua massa iniziale. Trovare il suo tempo di dimezzamento.

10) Un lago contiene 5×10^8 litri di acqua in cui, all'istante $t = 0$, sono dissolti 10^4 chili di sale. Dell'acqua si riversa nel lago in ragione di 100 litri al secondo e contiene 1% di sale. Dal lago fuoriesce la stessa quantità di acqua. Trovare la quantità di sale disciolta nel lago in funzione del tempo. Qual è il limite massimo del sale disciolto nel lago? (cioè qual è la quantità di sale per $t \to +\infty$?) In quale istante il sale disciolto sarà il 90% del limite massimo?

11) Calcolare

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

ove $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$ usando sia il metodo diretto, sia una formula di Gauss-Green.

22) Sia $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $F(x, y) = x + 3y^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $G(x, y) = x^2 - y^2$. Calcolare:

$$\int_\varphi F(x, y)\, ds, \qquad \int_\varphi F(x, y)\, dx + G(x, y)\, dy$$

13) Quattro studenti di una classe $(\omega_1, \dots \omega_4)$ hanno riportato in due esami distinti X e Y i seguenti voti:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
X	5	6	7	6
Y	4	5	5	6

Si calcoli l'equazione della retta di regressione dei dati. Si calcoli poi la matrice di correlazione delle variabili X e Y.

14) Sia D il dominio di $\mathbb{R}^2$ definito da: $D = \{\ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2;\ x+1 \leq y \leq 2x+3\ \}$. Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D e^x \frac{4y}{x+2}\, dx\, dy.$$

15) Calcolare l'ascissa curvilinea di:

$$\phi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \phi(t) = (\sin(2t), \cos(2t))\,.$$

Data poi la funzione

$$F(x,y) = x$$

calcolare:

$$\int_\phi F\, ds.$$

16) Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\iint_D (3x + xy)\, dx\, dy, \quad \text{dove } D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x+1\}$$

$$\iint_D \sin(x+y)\, dx\, dy, \quad \text{dove } D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

17) Sia $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2+1\}$. Calcolare:

$$\iint_D (xy+1)\, dx\, dy$$

sia con il metodo diretto, sia con una formula di Gauss-Green.

18) Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da: $F(x,y) = (xy, x\sin(y))$ ove $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Dette F_1 e F_2 le due componenti di F, calcolare:

$$\int_{+\partial D} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$$

usando (anche) la formula di Stokes.

Avviso: non ho verificato i precedenti esercizi, quindi alcuni possono essere di difficile o impossibile soluzione...