Esercizi di Ricapitolazione

Istituzioni di Matematiche II per Sc. Geologiche
A.A. 1998–99

Dicembre 1998

1) Dire quali delle seguenti terne divettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti e quali inceve linearmente dipendenti:
a) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 2, 4)$;
b) $u_1 = (1, -3, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1)$, $u_3 = (0, 2, 2)$;
c) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0)$;
d) $u_1 = (4, 1, 0)$, $u_2 = (8, 2, 0)$, $u_3 = (2, 1/2, 0)$.

2) Verificare che $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (2, 0, 2)$, $b_3 = (0, 3, 0)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere il vettore $(11, 2, 6)$ come combinazione lineare di b_1, b_2, b_3.

3) Date le seguenti applicazioni verificare se sono lineari e in caso affermativo trovare la matrice associata rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio:
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da: $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - y + 4z)$;
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da: $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$;
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da: $f(x, y, z) = (x - 11y + z, x - y + 4z, x^2)$;
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = 4x - y$.

4) Data $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da: $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da: $g(u, v) = (u - v, 2u + v, u, v)$, trovare $g \circ f$, la matrice A_f associata ad f, A_g associata a g, la matrice C associata a $g \circ f$ e verificare che vale $A_g A_f = C$ (rispetto alle basi canoniche).

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trovare l'applicazione lineare corrispondente.

6) Date le seguenti applicazioni lineari, trovare i loro autovettori e autovalori (rispetto alle basi canoniche):
$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da $g(x, y, z) = (2x - 2z, -3x - y + 2z, 3z)$;
$h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ data da: $h(x, y, z, t) = (3x + 6z, -2x - 4z, -x - 2z, 2x + 4y - 4z + 2t)$.

7) Calcolare gli autovalori e autovettori delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

8) Dato il vettore $u = (1, 2, -1, 4) \in \mathbb{R}^4$, dire quali dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono ortogonali ad u:
$u_1 = (1, 2, -1, 0), u_2 = (4, 0, 0, -1), u_3 = (2, -1, 4, 1), u_4 = (8, 6, 4, 2)$.

9) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x, y, z) = cos(x^2y^3z) + x^4y^2 - 2z^3$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

10) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x, y) = x^4 \sqrt[3]{y^2}$. Calcolare il gradiente e la matrice hessiana di f.

11) Delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ calcolare i punti critici e i massimi e minimi relativi:
$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$;
$f(x, y) = 4x^2y - x + y$;
$f(x, y) = 1 - e^{x^2+y^2}$.