Esempi

Sia $P = \mathbb{Q}[x, y]$, fissiamo il term order σ su P^2 dato da `PosLex`. Consideriamo i seguenti 3 elementi di P^2:

$$g_1 = (3xy^2, x^2 + 1), \quad g_2 = (2xy^2 - 1, xy - 1), \quad g_3 = (4x^2y, y^2)$$

che generano un modulo $M \subseteq P^2$. Calcolare:

1. $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = (\mathrm{LM}_\sigma(g_1), \mathrm{LM}_\sigma(g_2), \mathrm{LM}_\sigma(g_3))$

Ricordando che la mappa Φ, data da:

$$\Phi : P^3 \longrightarrow P^2, \qquad \Phi(\varepsilon_1) = \mathrm{LM}_\sigma(g_1),\ \Phi(\varepsilon_2) = \mathrm{LM}_\sigma(g_2),\ \Phi(\varepsilon_3) = \mathrm{LM}_\sigma(g_3)$$

definisce una struttura di P-modulo $T\langle e_1, e_2\rangle$-graduato su P^3,

2. Calcolare:

$$(P^3)_{x^3ye_1}, \quad (P^3)_{xy^4e_1}, \quad (P^3)_{x^4y^2e_1}$$

3. Più in generale, scrivere quanto può valere $\left(P^3\right)_{te_i}$ al variare di $te_i \in T\langle e_1, e_2\rangle$.

4. Calcolare il sistema di generatori di $\ker(\Phi)$ dato dai σ_{ij}.

5. Sia

$$m = \left(-3/2x^3 + 2x^2y^4\right)\varepsilon_2 + \left(3/4x^2y - xy^5\right)\varepsilon_3.$$

Calcolare le componenti omogenee di m nella $T\langle e_1, e_2\rangle$-gradazione di P^3 definita sopra. Quanto vale $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$? Quanto vale $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$?

6. Verificare che $m \in \ker(\Phi)$. Usando la dimostrazione del teorema che prova che σ_{ij} formano un sistema di generatori di $\ker(\Phi)$, esprimere m come combinazione lineare dei σ_{ij}.

Soluzioni

1. Vale:
$$\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = \big\{(3xy^2,0),(2xy^2,0),(4x^2y,0)\big\}$$

2. A me viene:
$(P^3)_{x^3ye_1} = \{(0,0,cx) \mid c \in \mathbb{Q}\}$,
$(P^3)_{xy^4e_1} = \{(c_1x^2, c_2x^2, 0) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}$,
$(P^3)_{x^4y^2e_1} = \{(c_1x^3, c_2x^3, c_3x^2y) \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Q}\}$

3. In generale:
$(P^3)_{x^{a+2}ye_1} = \{(0,0,cx^a)\}$
$(P^3)_{xy^{b+2}e_1} = \{(c_1y^a, c_2y^a, 0)\}$
$(P^3)_{x^{a+2}y^{b+2}e_1} = \{(c_1x^{a+1}y^b, c_2x^{a+1}y^b, c_3y^b)\}$
$(P^3)_{te_i} = 0$ altrimenti.

4. Sistema di generatori di $\ker(\Phi)$:
$$\sigma_{12} = \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad \sigma_{13} = \frac{1}{3}x\,\varepsilon_1 - \frac{1}{4}y\,\varepsilon_3, \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}x\,\varepsilon_2 - \frac{1}{4}y\,\varepsilon_3$$

5. L'elemento m è somma di due componenti omogenee:
$$m = \big(-3/2x^3\,\varepsilon_2 + 3/4x^2y\,\varepsilon_3\big) + \big(2x^2y^4\,\varepsilon_2 - xy^5\,\varepsilon_3\big)$$
la prima delle due componenti omogenee sta in $(P^3)_{x^4y^2e_1}$ la seconda sta in $(P^3)_{x^3y^6e_1}$. Quindi $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = x^4y^2e_1$ e $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = -3/2x^3\,\varepsilon_2 + 3/4x^2y\,\varepsilon_3$

6. vale:
$-3/2x^3\,\varepsilon_2 + 3/4x^2y\,\varepsilon_3 = 3x^2\sigma_{23}$
$2x^2y^4\,\varepsilon_2 - xy^5\,\varepsilon_3$ vale qualcosa di analogo, ma non ho fatto in tempo a calcolarlo.