Fogli NON riletti. Grazie per ogni segnalazione di errori.

Esempi di anelli artiniani

Ricordiamo i seguenti risultati:

Proposizione 1 *Se A è un anello artiniano, allora A possiede solo un numero finito di ideali massimali.*

Proposizione 2 *Se A è anello artiniano, allora $\mathcal{N}_A$, cioè il nilradicale di A, è nilpotente.*

Proposizione 3 *Un anello A è artiniano se e solo se è noetheriano e di dimensione* 0.

Proposizione 4 *Un anello artiniano A è prodotto diretto di un numero finito di anelli artiniani locali.*

Esempi

Esempio 1. Sia $I = (x^2, y^3) \subseteq K[x, y]$ (dove K è un campo). Sia $A = K[x, y]/I$. Proviamo che A è un anello artiniano. Cerchiamo intanto gli ideali primi di A. Ricordando la corrispondenza tra ideali di $K[x, y]$ che contengono I e ideali di $A = K[x, y]/I$, abbiamo che, se $\mathcal{P} \subseteq A$ è primo, allora esiste un ideale primo $\mathcal{P}' \subseteq K[x, y]$ tale che contiene I e $\mathcal{P} = \mathcal{P}'/I$. Se $I \subseteq \mathcal{P}'$, allora $(x, y) \subseteq \mathcal{P}'$ e quindi, essendo (x, y) massimale, $\mathcal{P}' = (x, y)$. Pertanto $\mathcal{P} = (x, y)/I$ è l'unico ideale primo di A. Questo prova che A è un anello locale e $\dim(A) = 0$. Essendo A anche noetheriano perchè $K[x, y]$ è anello noetheriano, A è un anello artiniano (conseguenza della proposizione 3). Inoltre A è locale, quindi in particolare ha un numero finito di ideali massimali (proposizione 1). In base alla proposizione 2, il nilradicale di A dove essere nilpotente. Verifichiamo: $\mathcal{N}_A = (x, y)/I$, quindi calcoliamo le varie potenze di $\mathcal{N}_A$:

$$\mathcal{N}_A = (x, y)/I, \qquad \mathcal{N}_A^2 = (x^2, xy, y^2)/I = (xy, y^2)/I,$$
$$\mathcal{N}_A^3 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)/I = (xy^2)/I, \quad \mathcal{N}_A^4 = (x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4)/I = (0)$$

Esempio 2. Sia $I = (x^2, y^3 - y) \subseteq K[x, y]$ e sia $A = K[x, y]/I$. Anche ora, come nel caso precedente, cerchiamo gli ideali primi di A. Se $\mathcal{P}'$ è un ideale di $K[x, y]$ che contiene I, allora $\mathcal{P}'$ può essere solamente uno dei seguenti ideali:

$$(x, y), \quad (x, y - 1), \quad (x, y + 1)$$

Quindi A possiede solo tre ideali massimali, che sono:

$$\mathcal{M}_1 = (x, y)/I, \quad \mathcal{M}_2 = (x, y - 1)/I, \quad \mathcal{M}_3 = (x, y + 1)/I$$

In particolare la dimensione di Krull di A è 0 e quindi, sempre per la proposizione 3, A è artiniano. Come si diceva, A ha solo 3 ideali massimali (in accordo con la proposizione 1). Il nilradicale (e anche il radicale di Jacobson) di A è dato da:

$$\mathcal{N}_A = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = (x, y^3 - y)/I = (x)/I$$

Si vede subito che $\mathcal{N}_A^2 = 0$, quindi, in accordo con la proposizione 2, il nilradicale è nilpotente.
In base alla proposizione 4, A è il prodotto diretto di anelli locali artiniani. Seguendo la dimostrazione della proposizione 4, osserviamo che, essendo $\mathcal{N}_A^2 = 0$, deve succedere che $\mathcal{M}_1^2\mathcal{M}_2^2\mathcal{M}_3^2 = 0$. Possiamo anche verificare direttamente questa uguaglianza, infatti

$$\mathcal{M}_1^2 = (xy, y^2)/I, \quad \mathcal{M}_2^2 = (x(y-1), (y-1)^2)/I, \quad \mathcal{M}_3^2 = (x(y+1), (y+1)^2)/I,$$

e da qui si vede che tutti i generatori di $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3$ sono polinomi che, modulo I, vanno a 0, quindi il prodotto dei tre ideali vale 0.

Consideriamo allora i tre anelli:

$$A_1 = A/\mathcal{M}_1^2, \quad A_2 = A/\mathcal{M}_2^2, \quad A_3 = A/\mathcal{M}_3^2$$

Quindi

$$A_1 = (K[x, y]/I)/((xy, y^2)/I) = K[x, y]/(xy, y^2, x^2, y^3 - y) = K[x, y]/(x^2, y)$$

Analogamente:

$$A_2 = (K[x, y]/I)/((x(y-1), (y-1)^2)/I) = K[x, y]/(x^2, y-1)$$

e

$$A_3 = (K[x, y]/I)/((x(y+1), (y+1)^2)/I) = K[x, y]/(x^2, y+1)$$

Procedendo come nel primo esempio, si può verificare direttamente che A_1, A_2 e A_3 sono tre anelli locali artiniani. La dimostrazione della proposizione 4 dice che l'omomorfismo:

$$\phi : A \longrightarrow A_1 \times A_2 \times A_3$$

dato da

$$\phi(a) = \left([a]_{\mathcal{M}_1^2}, [a]_{\mathcal{M}_2^2}, [a]_{\mathcal{M}_3^2}\right)$$

è un isomorfismo di anelli.

Possiamo vedere questo omomorfismo in modo più esplicito come segue: L'anello A è anche uno spazio vettoriale su K di dimensione finita e una sua base è data da:

$$1, x, y, xy, y^2, xy^2$$

(dove con x, y etc. si indicano ora le classi in A dei polinomi x, y, etc.). Analogamente, anche A_1, A_2 e A_3 sono spazi vettoriali su K di dimensione finita e tutti e tre hanno per base $1, x$ (cioè le classi di $1, x$ nei rispettivi quozienti). La mappa ϕ allora, se pensata come un'applicazione tra spazi vettoriali, è data da:

$$\begin{aligned}&\phi(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 xy + \lambda_4 y^2 + \lambda_5 xy^2) = \\ &(\lambda_0 + \lambda_1 x, \lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)x, \lambda_0 - \lambda_2 + \lambda_4 + (\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5)x)\end{aligned}$$

Si vede subito che $\ker(\phi) = 0$, quindi ϕ è iniettiva ed è suriettiva perché dominio e codominio sono spazi vettoriali di dimensione 6. La struttura di spazio vettoriale di A ora evidenziata si può però estendere ad una struttura di anello, definendo un prodotto sulla base di A ed estendendo per linearità. La tabella che definisce il prodotto in A è la seguente:

$\cdot$	1	x	y	xy	y^2	xy^2
1	1	x	y	xy	y^2	xy^2
x	x	0	xy	0	xy^2	0
y	y	xy	y^2	xy^2	y	xy
xy	xy	0	xy^2	0	xy	0
y^2	y^2	xy^2	y	xy	y^2	xy^2
xy^2	xy^2	0	xy	0	xy^2	0

Le tabelle che definiscono il prodotto in A_1, A_2 e A_3 sono sempre la stessa e cioè:

$\cdot$	1	x
1	1	x
x	x	0

Con queste tabelle di definizione dei prodotti, si può verificare, anche se è un po' laborioso, che ϕ conserva i prodotti. Senza scrivere tutta la verifica, vediamo solamente un esempio: $\phi(xy) = (0, x, -x)$, mentre $\phi(y) = (0, 1, -1)$ e $\phi(xy^2) = (0, x, x)$. Si ha:

$$\phi(xy \cdot y) = \phi(xy^2) = (0, x, x)$$

e

$$\phi(xy) \cdot \phi(y) = (0, x, -x) \cdot (0, 1, -1) = (0, x, x).$$

In particolare, in questo modo si vede esplicitamente qual è l'isomorfismo tra gli anelli artiniani A e $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Esempio 3. L'anello $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$ è finito, quindi è artiniano. La decomposizione in anelli artiniani locali prevista dalla proposizione 4 di $\mathbb{Z}/(n)$ è data da:

$$\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/(p_1^{\alpha_1}) \times \mathbb{Z}/(p_2^{\alpha_2}) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_k^{\alpha_k})$$

dove $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ è la decomposizione di n in fattori primi (quindi fornisce, in particolare, la solita decomposizione del modulo $\mathbb{Z}_n$ sul PID dato da $\mathbb{Z}$).