Fogli NON riletti. Grazie per ogni segnalazione di errori.

Esempi di decomposizione primaria

Consideriamo i due polinomi:

$$\begin{aligned} F &= (2\,x^2 - y)(2\,x - 8\,y + 15)(y - 3) \\ G &= (4\,x^3 + 6\,x^2 - y)(x + y - 6)(y - 3) \end{aligned}$$

nell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x, y]$ e l'ideale da essi generato:

$$I = (F, G)$$

Con un programma di calcolo simbolico, possiamo calcolare la decomposizione primaria di I. Otteniamo:

$$I = \bigcap_{i=1}^{9} \mathcal{Q}_i$$

dove

$$\begin{array}{lll} \mathcal{Q}_1 = (2y - 9, 2x - 3), & \mathcal{Q}_2 = (10y - 27, 10x - 33), & \mathcal{Q}_3 = (y - 2, 2x - 1), \\ \mathcal{Q}_4 = (16y - 27, 4x + 3), & \mathcal{Q}_5 = (y - 2, x + 1), & \mathcal{Q}_6 = (y - 8, x + 2), \\ \mathcal{Q}_7 = (16y - 25, 4x + 5), & \mathcal{Q}_8 = (y, x^2), & \mathcal{Q}_9 = (y - 3). \end{array}$$

Tutti gli ideali $\mathcal{Q}_i$ sono primi, tanne $\mathcal{Q}_8$ che è primario ma non primo. Gli ideali $\mathcal{Q}_i$ per $i = 1, \dots, 7$ sono anche massimali. Il radicale di $\mathcal{Q}_8$ è anche massimale, mentre l'ideale $\mathcal{Q}_9$ è solo primo, ma non massimale.

Possiamo dare un'interpretazione geometrica alla decomposizione primaria ora scritta.

Notazione: Se X è un qualunque insieme di polinomi (di $\mathbb{Q}[x, y]$), si pone:

$$V(X) = \left\{(a, b) \in \mathbb{A}^2 \mid f(a, b) = 0 \text{ per ogni } f \in X\right\}$$

Quindi per esempio $V(\{F\})$ (scritto anche $V(F)$) è l'insieme dei punti del piano che sono dati da una parabola e da due rette, così $V(G)$ è l'insieme dei punti dati da una curva cubica e due rette.

Si verifica facilmente che, se X è un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{Q}[x, y]$, allora $V(X) = V(I)$, dove I è l'ideale generato da X. Inoltre si ha che, se I_1 e I_2 sono due ideali, vale:

$$V(I_1 I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$$

Pertanto nel nostro esempio abbiamo che

$$V(I) = V\left(\cap \mathcal{Q}_i\right) = \cup V\left(\mathcal{Q}_i\right)$$

Osservando gli ideali primari $\mathcal{Q}_i$, si vede che $V(\mathcal{Q}_1) = (3/2, 9/2)$, $V(\mathcal{Q}_2) = (33/10, 27/10)$, $V(\mathcal{Q}_3) = (1/2, 2)$, $V(\mathcal{Q}_4) = (3/4, 27/16)$, $V(\mathcal{Q}_5) = (-1, 2)$, $V(\mathcal{Q}_6) = (-2, 8)$, $V(\mathcal{Q}_7) = (5/4, 25/16)$, $V(\mathcal{Q}_8) = (0, 0)$ e infine $V(\mathcal{Q}_9)$ è la

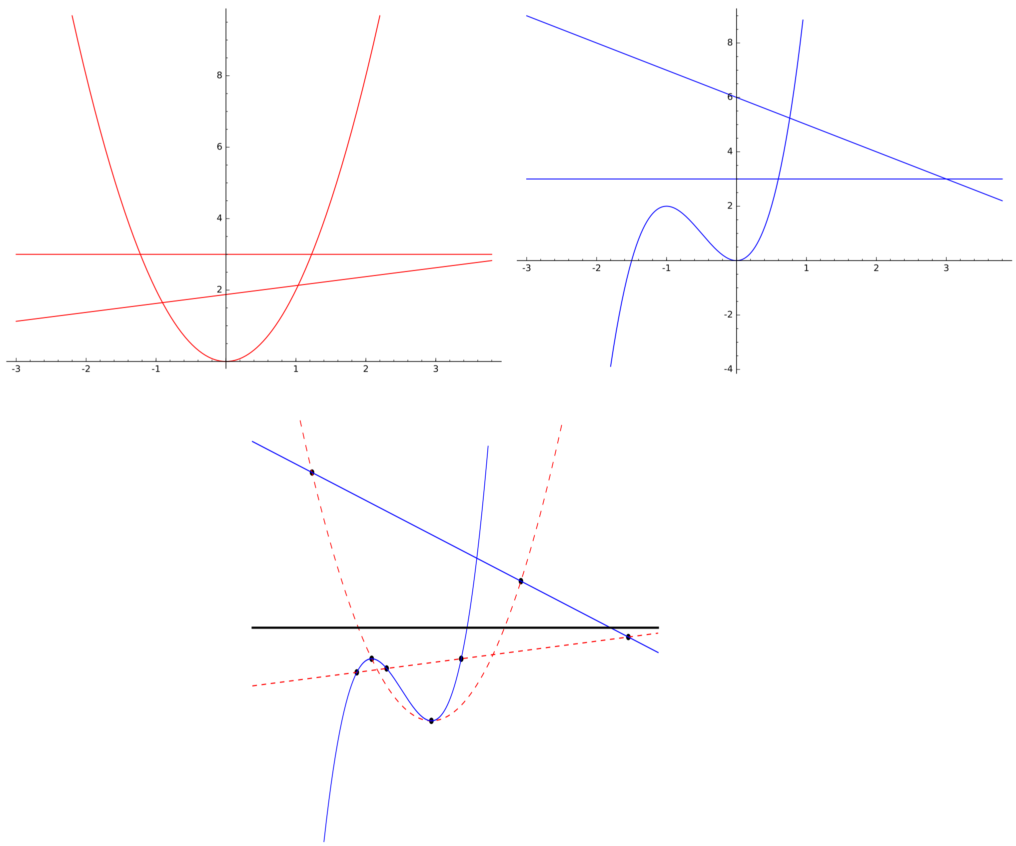

Figura 1: L'insieme degli zeri di $F = 0$ — cioè $V(F)$ — l'insieme degli zeri di $G = 0$ — cioè $V(G)$ — e l'insieme degli zeri di $V(I)$, che è costituito da 8 punti e dalla retta $y = 3$.

retta $y = 3$. Dalla decomposizione primaria abbiamo quindi trovato le soluzioni del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F &= & 0 \\ G &= & 0 \end{cases}$$

Si noti inoltre che il caso in cui $\mathcal{Q}_i$ è primario ma non primo (cioè quando $i = 8$) corrisponde al punto in cui la parabola e la cubica sono tangenti.

Altri esempi di decomposizione primaria:

Ideale

$$I = \left(x^2(x^2 + y^2 - 1), (y-1)(x+1)\right)$$

Decomposizione primaria:

$$I = (y-1, x^4) \cap (x+1, y^2)$$

Primi associati:

$$(y-1, x), \quad (x+1, y)$$

Ulteriori esempi

Ideale	dec. prim. min.	primi associati	primi immersi
(x^3, x^2y, xy^2)	$(x) \cap (y^2, x^2y, x^3)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(x^2y, xy^2)	$(x) \cap (y) \cap (x^2, y^2)$	$(x),\ (y),\ (x,y)$	(x,y)
(xy^2, x^2y, x^3)	$(x) \cap (x^3, xy^2, x^2y, y^3)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(xy^2, x^2y, x^3)	$(x) \cap (x^3, x^2y, y^2)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(x^2, xy)	$(x) \cap (x^2, y)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(x^2, xy)	$(x) \cap (x^2, y-x)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(x^2, xy)	$(x) \cap (x^2, y-2x)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)
(x^2, xy)	$(x) \cap (x^2, y-3x)$	$(x),\ (x,y)$	(x,y)

Si noti che gli ideali della terza e quarta riga sono uguali, così come gli ultimi 4 ideali, ma le decomposizioni primarire minimali sono differenti.