Esempio 1. Partiamo dal campo $K = \mathbb{Q}$, consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{Q}^3$ e l'endomorfismo di V dato dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} -42 & 22 & 81 \\ 6 & -3 & -11 \\ -25 & 13 & 48 \end{pmatrix}$$

La matrice B dà luogo all'endomorfismo: $t : V \longrightarrow V$ dato da $t(a,b,c) = B\,{}^t(a,b,c) = {}^t(-42a+22b+81c, 6a-3b-11c, -25a+13b+48c)$ (l'endomorfismo è riferito alla base canonica).

L'endomorfismo t definisce un prodotto esterno:

$$\mathbb{Q}[x] \times M_V \longrightarrow M_V$$

dato da:

$$\begin{array}{rcl} (k,(a,b,c)) & \mapsto & (ka,kb,kc) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Q} \text{ e ogni } (a,b,c) \in M_V, \\ (x,(a,b,c)) & \mapsto & t(a,b,c) = (-42a+22b+81c, 6a-3b-11c, -25a+13b+48c) \\ & & \text{per ogni } (a,b,c) \in M_V \\ (x^2,(a,b,c)) & \mapsto & t(t(a,b,c)) = \dots \\ \dots & & \dots \end{array}$$

e l'operazione di prodotto esterno viene poi estesa per linearità. (M_V è, come insieme e gruppo abeliano, coincidente con V).

Poiché V è di dimensione finita, sappiamo che M_V è un modulo di torsione e poiché V, come spazio vettoriale ha dimensione 3, sappiamo che il polinomio minimo di t (e di B) sarà al massimo di grado 3 e sarà anche l'annullatore del modulo M_V. Cerchiamo di determinare $\mathrm{Ann}(M_V)$. Consideriamo il generico polinomio monico di grado 3: $f = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Calcoliamo $f\cdot(a,b,c)$, cioè il prodotto esterno di f per un generico elemento di M_V. Usando la legge del prodotto esterno definita sopra, si ha:

$$\begin{array}{rcl} f\cdot(a,b,c) & = & ((a_0-42a_1-129a_2-304a_3)a+(22a_1+63a_2+145a_3)b+ \\ & & \quad 81(a_1+244a_2+570a_3)c, \\ & & (6a_1+5a_2+3a_3)a+(a_0-3a_1-2a_2-a_3)b+ \\ & & \quad (-11a_1-9a_2-5a_3)c, \\ & & (-25a_1-72a_2-166a_3)a+(13a_1+35a_2+79a_3)b+ \\ & & \quad (a_0+48a_1+136a_2+311a_3)c) \end{array}$$

Si tratta ora di trovare per quali valori di a_0, a_1, a_2, a_3 vale: $f\cdot(a,b,c) = (0,0,0)$

per ogni $(a, b, c) \in M_V$. Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_0 - 42a_1 - 129a_2 - 304a_3 & = & 0 \\ 22a_1 + 63a_2 + 145a_3 & = & 0 \\ a_1 + 244a_2 + 570a_3 & = & 0 \\ 6a_1 + 5a_2 + 3a_3 & = & 0 \\ a_0 - 3a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 0 \\ -11a_1 - 9a_2 - 5a_3 & = & 0 \\ -25a_1 - 72a_2 - 166a_3 & = & 0 \\ 13a_1 + 35a_2 + 79a_3 & = & 0 \\ a_0 + 48a_1 + 136a_2 + 311a_3 & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono: $a_0 = a_3, a_1 = 2a_3, a_2 = -3a_3$. Volendo ottenere un polinomio monico, scegliamo $a_3 = 1$ e otteniamo il seguente annullatore di M_V: $g = 1 + 2x - 3x^2 + x^3$.

Per costruire la decomposizione del modulo M_V in somma diretta di ciclici, si deve innanzitutto trovare un elemento di M_V di ordine g. Consideriamo ad esempio l'elemento $c = (1, 1, 1)$ e calcoliamo il suo ordine. Basta procedere come sopra, calcolando $f \cdot (1, 1, 1)$ ottenendo così il seguente sistema lineare nelle incognite a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} a_0 + 61a_1 + 178a_2 + 411a_3 & = & 0 \\ a_0 - 8a_1 - 6a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ a_0 + 36a_1 + 99a_2 + 224a_3 & = & 0 \end{cases}$$

che ammette le soluzioni: $a_0 = a_3, a_1 = 2a_3, a_2 = -3a_3$. In particolare abbiamo che c è di ordine g. Il modulo ciclico $\langle c \rangle$ ammette per base gli elementi $c, t(c), t(t(c))$, cioè $c, x \cdot c, x^2 \cdot c$, cioè:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (61, -8, 36), \quad v_3 = (178, -6, 99)$$

Pertanto $M = \langle c \rangle$ in quanto, come spazi vettoriali, hanno la stessa dimensione. Rispetto alla base v_1, v_2, v_3 la matrice associata all'endomorfismo t è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e la matrice di passaggio W dalla base v_1, v_2, v_3 alla base canonica di V è data da:

$$\begin{pmatrix} -576/851 & 369/851 & 46/37 \\ -105/851 & -79/851 & 8/37 \\ 44/851 & 25/851 & -3/37 \end{pmatrix}$$

ed è tale che $B = W^{-1}AW$, quindi A e B sono matrici simili. Si noti che A è la matrice compagna di g, come deve succedere. Si noti infine che $g(B)$ è la matrice nulla, come deve succedere, essendo g il polinomio minimo di B.