Esempio 1. Sia G un insieme con 12 elementi, denominati $0, 1, 2, 3, \ldots, 11$. Su G definiamo una somma secondo la seguente tabella:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8	6
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6	7
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3	4
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2	0
11	11	9	10	8	6	7	5	3	4	2	0	1

Si vede che $(G, +)$ è un gruppo abeliano finito (l'elemento neutro è proprio quello denominato con 0).

Ogni elemento deve avere un ordine finito. Infatti vale:

elemento	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ordine	1	3	3	2	6	6	2	6	6	2	6	6

Si possono calcolare tutti i moduli ciclici (sottogruppi ciclici) generati dagli elementi di G. Si trova quanto segue:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\langle 0 \rangle & = & \{0\} & \qquad & \langle 1 \rangle & = & \{0, 1, 2\} \\
\langle 2 \rangle & = & \{0, 1, 2\} & & \langle 3 \rangle & = & \{0, 3\} \\
\langle 4 \rangle & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & & \langle 5 \rangle & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
\langle 6 \rangle & = & \{0, 6\} & & \langle 7 \rangle & = & \{0, 1, 2, 6, 7, 8\} \\
\langle 8 \rangle & = & \{0, 1, 2, 6, 7, 8\} & & \langle 9 \rangle & = & \{0, 9\} \\
\langle 10 \rangle & = & \{0, 1, 2, 9, 10, 11\} & & \langle 11 \rangle & = & \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}
\end{array}
$$

Si noti che il numero di elementi di ciascun gruppo ciclico coincide con l'ordine del suo generatore, ma questo vale per i gruppi abeliani, non vale in generale (se non altro perché l'ordine è un elemento del PID, il numero di elementi un numero intero).

Se si calcola l'annullatore di G si vede che esso vale 6. Quindi sappiamo che deve esserci in G almeno un elemento di ordine 6 (e infatti gli elementi $4, 5, 7, 8, 10, 11$ hanno tutti ordine 6).

Scegliamo uno di questi, per esempio 4. Esso genera il modulo (gruppo) ciclico $\langle 4 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, quindi sappiamo che deve valere:

$$G = \langle 4 \rangle \oplus G_1$$

per G_1 opportuno.

A questo punto possiamo provare a prendere per G_1 uno dei gruppi ciclici scritti sopra. Si vede che

$$\begin{array}{rclclcl} G & = & \langle 4\rangle + \langle 7\rangle & = & \langle 4\rangle + \langle 8\rangle & = & \langle 4\rangle + \langle 10\rangle \\ & = & \langle 4\rangle + \langle 11\rangle & = & \langle 4\rangle + \langle 6\rangle & = & \langle 4\rangle + \langle 9\rangle \end{array}$$

e solo negli ultimi due casi la somma è diretta (ad esempio $\langle 4\rangle \cap \langle 7\rangle = \{0, 1, 2\}$). Quindi possiamo ottenere la decomposizione:

$$G = \langle 4\rangle \oplus \langle 6\rangle$$

Poiché : $\langle 4\rangle \simeq \mathbb{Z}_6$ e $\langle 6\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ la decomposizione diventa:

$$G = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$$

e questa è la decomposizione di G in somma diretta di gruppi ciclici tali che gli ordini di tali gruppi sono gli invarianti fondamentali (si noti che in effetti $\operatorname{ord}(6) = 2$ divide $\operatorname{ord}(4) = 6$).

Se avessimo scelto un altro elemento in G di ordine 6, ad esempio 8, avremmo trovato un'altra decomposizione:

$$G = \langle 8\rangle \oplus \langle 3\rangle$$

che ha comunque lo stesso numero di addendi e gli stessi invarianti fondamentali.

Esempio 2. Sia K un campo e consideriamo il $K[x]$-modulo dato da:

$$M = \frac{K[x] \oplus K[x]}{\langle (x(x+1), 0), (0, x(x-1))\rangle}$$

Il modulo M è finitamente generato da $m_1 = [(1, 0)]$ e $m_2 = [(0, 1)]$. Vale: $\operatorname{Ann}(m_1) = (x(x + 1))$, cioè è l'ideale di $K[x]$ generato da $x(x + 1)$. Infatti

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ann}(m_1) & = & \{f \in K[x] \mid fm_1 = 0\} \\ & = & \{f \in K[x] \mid (f, 0) \in \langle((x(x+1), 0), (0, x(x-1))\rangle\} \\ & = & \{f \in K[x] \mid f \in (x(x+1))\} \ = \ (x(x+1)) \end{array}$$

Pertanto $\operatorname{ord}(m_1) = x(x + 1)$; analogamente: $\operatorname{ord}(m_2) = x(x - 1)$.

In particolare M è un $K[x]$-modulo di torsione.

Calcoliamo $\operatorname{Ann}(M)$:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ann}(M) & = & \{f \in K[x] \mid fm_1 = 0 \ e \ fm_2 = 0\} \\ & = & (x(x+1)) \cap (x(x-1)) \\ & = & \big(x(x^2-1)\big) \,. \end{array}$$

Pertanto M deve avere un elemento di ordine $x(x^2 - 1)$. Sia $m = um_1 + vm_2$ un generico elemento di M. Vogliamo calcolare il suo ordine. Vale:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ann}(m) & = & \operatorname{Ann}(um_1 + vm_2) \\ & = & \{f \in K[x] \mid fu \in (x(x+1)) \ \ e \ fv \in (x(x-1))\} \end{array}$$

quindi, se u è primo con $x(x+1)$ e v è primo con $x(x-1)$, l'annullatore di m è $\big(x(x^2-1)\big)$. In particolare segue che $\mathrm{ord}(m_1+m_2) = x(x^2-1)$ e quindi m_1+m_2 è un elemento che ha l'ordine coincidente con l'annullatore minimale del modulo M. Pertanto esisterà un sottomodulo L di M tale che:

$$M = \langle m_1+m_2\rangle \oplus L$$

Per trovare L procediamo come nella costruzione fatta nel corso. Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \langle m_1+m_2\rangle & \longrightarrow & M \\ & & t\downarrow & s\swarrow & \\ & & \langle m_1+m_2\rangle & & \end{array}$$

dove t è l'identità e si tratta di trovare s in modo da rendere commutativo il diagramma. Il modulo M si ottiene dal modulo ciclico $\langle m_1+m_2\rangle$ aggiungendo un elemento, per esempio m_1, cioè

$$M = \langle m_1+m_2\rangle + \langle m_1\rangle$$

ma la somma non è diretta. Il modulo quoziente $M/\langle m_1+m_2\rangle$ è ciclico con generatore $[m_1]$. L'ordine di $[m_1]$ si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}([m_1]) &= \{f \in K[x] \mid fm_1 \in \langle m_1+m_2\rangle\} \\ &= \{f \in K[x] \mid \exists g \in K[x] : (f-g, g) \in \langle (x(x+1), 0), (0, x(x-1))\rangle\} \end{aligned}$$

da cui $g = ux(x-1)$ e $f - ux(x-1) = vx(x+1)$ per $u, v \in K[x]$. Pertanto $f = hx$, quindi $h = u(x-1) + v(x+1)$, dove u, v possono essere scelti arbitrariamente. Se scegliamo $u = 1, v = -1$, h diventa una costante non nulla, questo prova che $x \in \mathrm{Ann}([m_1])$ e poiché ogni elemento $f \in \mathrm{Ann}([m_1])$ deve essere multiplo di x, come visto sopra, abbiamo che $\mathrm{Ann}([m_1]) = (x)$. In particolare $\mathrm{ord}([m_1]) = x$. In conseguenza, $xm_1 \in \langle m_1+m_2\rangle$. Al fine di trovare s, consideriamo la sequenza esatta corta:

$$0 \longrightarrow K[x] \xrightarrow{u} \langle m_1+m_2\rangle \oplus K[x] \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

dove $u(\alpha) = (\alpha x m_1, -x\alpha)$ e $v(m, \alpha) = m + \alpha m_1$. Vale: $\mathrm{ord}(\langle m_1+m_2\rangle) = \mathrm{ord}([m_1]) \cdot (x^2-1)$. Considero $t(xm_1) = xm_1$ che è tale che $(x^2-1)(xm_1) = 0$, allora esiste un $c' \in \langle m_1+m_2\rangle$ tale che $xm_1 = (x^2-1)c'$. Per calcolare c' procediamo come nel primo lemma visto nel corso: xm_1 deve essere della forma $f(m_1+m_2)$ dove si vede che deve valere $f = -1/2x(x-1)$. Pertanto $c' = -1/2(x-1)(m_1+m_2)$. Consideriamo allora la mappa

$$t' : \langle m_1+m_2\rangle \oplus K[x] \longrightarrow \langle m_1+m_2\rangle$$

che è data da $t'(m, \beta) = m - 1/2\beta x(x-1)(m_1+m_2)$. Poiché ogni elemento $m \in \langle m_1+m_2\rangle$ è della forma $\alpha(m_1+m_2)$, si può anche riscrivere t' come: $t'(\alpha(m_1+m_2), \beta) = (\alpha - 1/2\beta(x-1))(m_1+m_2)$. Poiché $t'u = 0$, la mappa

$s : \langle m_1 + m_2\rangle + \langle m_1\rangle \longrightarrow \langle m_1 + m_2\rangle$ con $s(\alpha(m_1 + m_2) + \beta m_1) = (\alpha - 1/2\beta(x - 1))(m_1 + m_2)$ è ben definita. Dalla costruzione fatta, sappiamo che $L = \ker(s)$. Si tratta allora di calcolare $\ker(s)$, cioè $\alpha, \beta \in K[x]$ tali $(\alpha - 1/2\beta(x - 1))(m_1 + m_2) = 0$. Pertanto cerchiamo α, β tali che $\alpha - 1/2\beta(x - 1) \in \mathrm{Ann}(m_1 + m_2)$. Allora $\alpha - 1/2\beta(x - 1) = gx(x^2 - 1)$ quindi α deve essere divisibile per $x - 1$, quindi $\alpha = \alpha'(x-1)$ e allora $\alpha' - 1/2\beta = gx(x+1)$. Quindi $\alpha = (1/2\beta + gx(x+1)$. Calcolando $\ker(s)$ si ottiene (ricordando che $x(x+1)$ è l'ordine di m_1 e $x(x-1)$ è l'ordine di m_2):

$$\ker(s) = \langle (x - 1)(m_1 + m_2) + m_1\rangle$$

Pertanto $\ker(s)$ è ciclico e vale:

$$M = \langle m_1 + m_2\rangle \oplus \langle (x - 1)(m_1 + m_2) + m_1\rangle$$

L'ordine di $(x - 1)(m_1 + m_2) + m_1$ è (dovrebbe essere) $x(x^2 - 1)$ che divide l'ordine di $m_1 + m_2$.