Interpretazione della Funzione di Appartenenza*

Luca Bortolussi

February 2003

Indice

*Questa è anche una appendice della mia tesi di laurea.

1 Introduzione

In quest'appendice ci occuperemo della teoria degli insiemi fuzzy (vedi capitolo 1), trattando in particolare problemi inerenti il significato della funzione di appartenenza. Infatti, un'interpretazione solida e metodi pratici per stimare quest'ultima sono necessari per dare fondamento a tutta la teoria. Un primo tentativo in tal senso potrebbe essere quello di intendere la funzione di appartenenza come il grado con cui un oggetto appartiene ad un certo insieme (il grado con cui Gianni appartiene all'insieme delle persone alte), ma questo risulta insoddisfacente nel momento in cui ci si chieda quale sia il significato di "grado di appartenenza", come esso si possa determinare e quali operazioni sia lecito compiere.

Molti tentativi di interpretazione sono stati fatti, ognuno indissolubilmente legato alla visione "filosofica" dell'autore. In questa breve rassegna tratteremo essenzialmente quattro punti di vista. Vediamo, mediante un esempio, quali essi siano. Siamo interessati al predicato vago "Gianni (x) è alto (F)", che rappresentiamo come l'insieme sfocato F, a cui x appartiene, diciamo, con grado $F(x) = 0,7$. Cosa significa $F(x) = 0,7$?

- **Interpretazione come verosimiglianza**: 70% di una data popolazione ha dichiarato che Gianni è alto.
- **Interpretazione come similarità**: l'altezza di Gianni è lontana da un oggetto "prototipo", che è veramente alto, con un grado di 0,3.
- **Interpretazione come utilità**: 0,7 è l'utilità di asserire che Gianni è alto.
- **Interpretazione come misurazione**: quando comparato con altre persone, Gianni è più alto di altri e questo fatto può essere codificato come 0,7 in una qualche scala.

Ritorneremo in dettaglio su queste interpretazioni nella sezione A.2.

In generale, però, sembra chiaro che quando ci riferiamo e cerchiamo di interpretare concetti quali il grado di appartenenza siamo destinati a scontrarci con almeno due problemi. Il primo è di tipo epistemologico. La teoria fuzzy nasce, infatti, con l'idea di modellizzare il ragionamento vago, e quindi è necessario chiedersi se essa funziona, cioè se è scientificamente valida. Il secondo è di tipo squisitamente filosofico (metafisico e ontologico) e riguarda il concetto di verità. Il grado di appartenenza, infatti, può essere visto in modo equivalente come grado di verità di una certa proposizione. Questo ci

spinge a riflettere sul concetto di verità e su che significato abbia l'espressione "grado di verità".
Questi problemi li discuteremo più ampiamente nella sezione A.3.

2 Interpretazione della funzione di appartenenza

La teoria della logica sfocata ha preso due direzioni principali di evoluzione: da un lato lo sviluppo della teoria da un punto di vista formale, e dall'altro il suo utilizzo nel modellare il ragionamento vago, tipico del linguaggio, e nella produzione di macchine più efficienti.
Se la prima matrice di sviluppo non ha seri problemi, per quanto rischi di rimanere astratta e priva di applicazioni, le radici della nascita della logica sfocata impongono una lunga riflessione sulla seconda.

Un grosso problema connesso con la teoria *fuzzy* è quello di capire quale sia il significato dei gradi di appartenenza. È necessario, cioè, dare un interpretazione della funzione di appartenenza che sia capace di giustificare le operazioni logiche ed aritmetiche che si fanno con essa e di dire quali siano lecite e quali no. Questo va fatto anche per identificare con più precisione quale sia il suo campo di applicazione nel descrivere il ragionamento umano. Un'ulteriore questione, che non verrà trattata molto in questo scritto, è come si possano assegnare i valori numerici dei gradi di appartenenza per descrivere in modo ottimale la realtà.
Ricapitolando, i problemi a cui va trovata una soluzione sono determinare il significato del concetto di grado di appartenenza, capire quali operazioni sia lecito fare con essi e stabilire dei metodi di stima.

Molto si è scritto su questi argomenti, senza peraltro riuscire a trovare un'unica risposta soddisfacente. Infatti, l'interpretazione del concetto di grado di verità dipende fortemente dalla visione filosofica dell'autore riguardo a questi temi.
Si possono distinguere due grossi filoni. Il primo propugna una visione oggettiva della verità e propende per dei metodi di assegnazione che coinvolgano gruppi di individui. Il secondo, invece, contrappone una visione soggettiva della verità e quindi i metodi di stima usati sono di tipo individuale.
Qui di seguito faremo una breve rassegna di alcune interpretazioni date delle funzioni di appartenenza. La cosa interessante è che essa viene dedotta da impalcature teoriche molto diverse tra loro, che si fondano su visioni del mondo molto dissonanti.

2.1 Interpretazione come verosimiglianza

Questa interpretazione è dovuta al lavoro della norvegese Ellen Hisdal (cfr. [14]). L'interpretazione che cerca di dare della funzione di appartenenza è di tipo oggettivo, partendo da una serie di critiche alla teoria "classica" degli insiemi sfocati.
Prima di tutto critica la scelta degli operatori di minimo e massimo per intersezione e unione, in quanto mostra che questi danno origine ad una serie di incongruenze logiche, come si può vedere considerando le funzioni di appartenenza degli insiemi delle persone alte, delle persone di media altezza, e delle persone alte o di media altezza. Quest'ultima presenta quasi sempre una fossa che è molto controintuitiva.
Secondariamente critica il fatto che il principio di non contraddizione non valga nella logica sfocata, ritenendolo, invece, universalmente valido.
Infine critica uno degli assunti base sulle funzioni di appartenenza, e cioè che i gradi di appartenenza non sono probabilità. Lei, anzi, sposa quest'ultima tesi, nel senso di verosimiglianza.

Hisdal si pone come obiettivo quello di trovare una teoria unificata che serva a trattare l'informazione e il ragionamento linguistico. La sua assunzione è che ci sia un processo unico soggiacente al nostro pensiero, procedimento complicato e oscuro, ma identificabile in qualche modo grazie ad esperimenti. Quindi il tipo di teoria che cerca di costruire è di tipo descrittivo, realizzata mediante inferenze da esperimenti.

Il modello che elabora, a cui da il nome di TEE (Threshold, Error and assumption of Equivalence), si basa sull'assunzione che la vaghezza sia causata essenzialmente dalla poca informazione, e che quindi sia eliminabile. Inoltre assume che ogni insieme sfocato ammetta una soglia di appartenenza ben definita, che si sfoca a causa di imprecisioni nella misurazione. Per esempio, lei suppone che nel riferirci alle persone alte, noi abbiamo ben chiara quale sia la soglia che divide gli alti dai non alti. Ma sappiamo anche che se ci viene richiesto di dire se una certa persona è alta o no, non possiamo in condizioni normali effettuare una misura precisa dell'altezza. Quindi siamo consci di commettere un errore con una certa probabilità, e ne teniamo conto attribuendo al soggetto sotto esame un grado di appartenenza minore di uno.

2.1.1 Il modello TEE

Analizziamo questo modello TEE in maggior dettaglio.
La Hisdal distingue tre fonti di sfocatezza:

- Gli errori di misura;
- l'informazione incompleta;
- le contraddizioni interpersonali.

Viene poi introdotto un insieme di etichette linguistiche che servono a descrivere un certo attributo, per esempio l'altezza. Chiamiamo $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ questo insieme. è importante che questa sia un'informazione condivisa da tutti, sperimentatori e cavie.
Successivamente si passa alla descrizione di tre tipi fondamentali di esperimenti, che servono per stimare la funzione di appartenenza:

- **etichettatura** – si chiede quale etichetta di Λ corrisponda ad x
- **si** / **no** – si chiede se "x è λ".
- **grado di appartenenza** – si chiede con che grado x sia λ.

Il modello della Hisdal si fonda su tre assunzioni base, grazie alle quali si ricava un'interpretazione della funzione di appartenenza in termini di verosimiglianza.

- **Soglia**. Nel caso in cui si sia potuta effettuare una misura esatta u^{ex} dell'attributo di x, la risposta ai primi due esperimenti è perfettamente definita una volta che sia stata fissata una soglia. Questa soglia dipende dall'informazione a disposizione dell'individuo e dall'individuo stesso. Quindi le ultime due fonti di sfocatezza si riversano su una diversità nella scelta delle soglie.

- **Errore**. Consideriamo un'etichetta λ e una intervallo di quantizzazione per essa, $\Delta u_\lambda = \{u_{\lambda l}, \ldots, u_{\lambda u}\}$ (ove $u_{\lambda l}$ e $u_{\lambda u}$ sono delle soglie inferiori e superiori). Sotto condizioni approssimate di misurazione la risposta ai primi due esperimenti dipende dal fatto che il valore osservato u cada o no nell'intervallo di quantizzazione per λ. Quindi, abbiamo una curva di soglia a scalino, $P(\lambda|u)$, e una curva che esprime l'errore nella misurazione, $P(u|u^{ex})$. Se consideriamo la convoluzione di queste due curve, otteniamo la curva $P(\lambda|u^{ex})$. Qui P non è una probabilità, bensì una verosimiglianza, in quanto l'argomento variabile è il secondo e non il primo.

- **Assunzione di Equivalenza**. Il passo finale nell'interpretazione della funzione di appartenenza in questa cornice è assumere che essa sia equivalente alla verosimiglianza sopra trovata, cioè:

$$\mu_\lambda(u^{ex}) = P(\lambda|u^{ex})$$

2.1.2 Critiche

Prima di tutto è molto discutibile cercare di accomunare gradi di appartenenza e probabilità, in una qualche loro forma. Questo perché le probabilità rappresentano (in una loro interpretazione comportamentale) il grado di fiducia che un osservatore ha nel verificarsi di un evento, fatto questo che richiede che ci sia una dicotomia nell'accadere o non accadere degli eventi. Le probabilità, quindi, non prevedono che gli eventi possano verificarsi in una certa misura. Questo le fa essere poco adatte ad essere usate in una teoria che fa del chiaroscuro la sua essenza.

La seconda critica che si può muovere al modello TEE sta nel cercare un modello unificato ad ogni costo. è molto probabile, invece, che non ci sia un processo unico alla base di ogni nostro ragionamento, ma diversi processi in dipendenza dal contesto e dall'esperienza (vedi sezione A.3.5).

La terza critica abbraccia la visione della vaghezza. L'assunzione che ogni concetto vago sia tale solo a causa della poca informazione, e che ogni attribuzione di verità venga fatta da noi a soglia, significa cercare di spingere per una visione della realtà in bianco e nero. Inoltre è molto difficile sostenere che gli individui ragionino a soglie nette e facciano delle stime di errore per attribuire gradi di appartenenza. Il problema forse sta nel significato di questi numeri. Se vogliamo scorgervi in essi un senso ad ogni costo, siamo indubbiamente costretti a fare assunzioni forti come quelle del modello TEE. In effetti, il ragionamento umano funziona molto più per paragoni che per attribuzioni numeriche precise, quindi la cosa veramente importante dei gradi di appartenenza è il loro ordinamento.

2.2 Interpretazione come similarità – cenno

L'interpretazione della funzione di appartenenza dal punto di vista della similarità richiede l'introduzione di due concetti: un oggetto prototipo, che soddisfa pienamente una certa proprietà, e un qualche modo per misurare la distanza dell'oggetto considerato dall'esempio perfetto. Non è chiaro, comunque, se ogni proprietà debba necessariamente ammettere un prototipo, né come misurare la distanza.

In ogni caso, introdurre una distanza significa introdurre una struttura di spazio metrico sull'insieme universo.

Questo tipo di approccio affonda le sue radici nella psicologia cognitiva, ed in particolare nello studio della categorizzazione, cioè della classificazione in categorie delle nostre percezioni. Qui sembra che ogni categoria (per esempio, il concetto di cane) abbia un elemento prototipico, e un oggetto viene inserito in tale categoria solo se è "abbastanza vicino" a tale prototipo.

2.3 Interpretazione come utilità

Questa interpretazione è stata proposta da Robin Giles in [12]. In essa la funzione di appartenenza viene dedotta da un modello basato sulla teoria dell'utilità.
Giles parte da un problema più ampio, cioè dall'analisi del ragionamento sfocato e dei gradi di verità degli enunciati. Questo gli è possibile in quanto osserva che grado di appartenenza di un insieme, grado di soddisfazione di una proprietà e grado di verità di un enunciato sono concetti equivalenti.
Viene fatta, inoltre, una distinzione tra due diversi modi di cercare una soluzione. L'**approccio assiomatico** è quello in cui si danno degli assiomi matematici e poi si cerca di giustificarli facendo degli esempi. L'**approccio semantico**, quello adottato in questo modello, parte invece da un'interpretazione pratica del problema, dalla quale vengono dedotti gli assiomi matematici.

Il primo passo nella costruzione di un modello semantico per il ragionamento sfocato sta nella comprensione del significato *pratico* di una sentenza. Generalmente una proposizione è usata per comunicare e porta con sé una certa informazione, che consiste nelle credenze di chi parla. Quindi una sentenza sfocata è una sentenza a cui si è disposti ad attribuire un certo grado di credenza. Per ragioni pragmatiche, inoltre, è preferibile restringere l'attenzione a sentenze asserite, cioè ad asserzioni.
Nella teoria logica classica, il significato di un'asserzione si identifica con il suo valore di verità. Questo generalmente non è un concetto assoluto (come per l'enunciato "$1 + 1 = 2$"), altrimenti una sentenza non porterebbe molta informazione con sé, ma dipendente dal mondo possibile in cui ci si trova. Quindi il significato di una frase è una funzione $\Phi : \Omega \to \{0, 1\}$, dove Ω è l'insieme di tutti i mondi possibili. Ne segue che due proposizioni hanno lo stesso significato se il loro valore di verità è lo stesso in ogni mondo possibile.
Adottando un punto di vista pragmatico, si può affermare anche che il significato di una sentenza classica è quell'informazione che è necessaria e sufficiente, in congiunzione con le credenze di un agente sul mondo possibile corrente, per permettere all'agente[1] di decidere se asserire o no la sentenza. Qui si suppone che la frase verrà asserita solo se è vera.
è chiaro ora che nella logica sfocata il significato di un enunciato è una funzione che ad ogni mondo possibile associa il grado di credenza in tale proposizione. Tale grado si può pensare in qualche modo legato al grado di volontà di un agente nel'asserire tale frase. Vale che due enunciati sfocati hanno lo stesso significato se e solo se, nello stesso mondo possibile, siamo

[1] Il termine "agente" viene usato da Giles

disposti ad asserire il primo tanto quanto siamo disposti ad asserire il secondo.
Queste considerazioni spostano il problema del grado di verità in un'ottica decisionale. Nella sezione seguente vedremo come Giles, usando gli strumenti della teoria delle decisioni, risolva questo problema.

2.3.1 Teoria delle decisioni e la verità come utilità

La teoria delle decisioni riguarda le situazioni in cui un'agente deve scegliere tra più azioni possibili. Il risultato di una certa azione è pensato come una funzione $f(A, \omega) : \mathcal{A} \times \Omega \to \mathcal{R}$, dove A è un'azione, ω un mondo possibile, $\mathcal{A}$ lo spazio delle azioni, Ω lo spazio dei mondi possibili e $\mathcal{R}$ lo spazio dei risultati.
Su $\mathcal{R}$ diamo una funzione di utilità u, che rappresenta il valore del risultato secondo l'agente. Questa funzione soddisfa alla seguente proprietà: data una lotteria i cui premi sono i possibili risultati, il suo valore è una media pesata mediante u dei risultati coinvolti. Inoltre, il codominio di u è una certa scala di utilità, determinata a meno di trasformazioni lineari positive.
Il problema decisionale viene specificato tramite la **funzione di rendita** $u(A, \omega)$. Se su Ω ho una distribuzione di probabilità si parla di problema decisionale sotto rischio, che si può risolvere, per esempio, massimizzando rispetto ad A i valori medi di u rispetto alla probabilità su Ω.
Importante ai nostri fini è anche l'assioma di Rubin, che dice che le azioni ottimali di un problema decisionale restano invariate se alla funzione di rendita si somma una funzione dei soli mondi possibili.

Vediamo ora come la teoria delle decisioni si applichi alla questione dei valori di verità. Consideriamo una proposizione e il seguente insieme di azioni $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, dove A_1 è l'azione di asserire la proposizione mentre A_2 è l'azione di non asserirla. Sia $u(A, \omega)$ la funzione di rendita del problema, e consideriamo $u_2 = u(A_2, \omega)$. Applicando l'assioma di Rubin, si può considerare come equivalente ad u la funzione di rendita $u' = u - u_2$. Ma $u'(A_2, \omega) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, e quindi u' è determinata dai valori che assume su A_1, cioè $u'(A_1, \omega) = v(\omega)$. Qui $u'(A_1, \omega) = u(A_1, \omega) - u(A_2, \omega)$ è l'utilità addizionale nell'asserire A_1 piuttosto che nel non farlo.
La funzione v è detta la **rendita dell'asserzione**.

La visione pragmatica adottata in quest'interpretazione porta ad affermare che *il significato di una proposizione è la sua funzione di rendita*, la quale esprime, dunque, la desiderabilità nel fare l'asserzione.

2.3.2 Dalla funzione di rendita alla funzione di appartenenza

Prima di mostrare il passaggio dalla funzione di rendita alla funzione di appartenenza, vediamo come si possa introdurre una struttura matematica più raffinata.
Per quanto detto sopra, possiamo identificare un'asserzione a con la sua funzione di rendita $a(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$.[2] Possiamo supporre senza ledere la generalità che a sia limitata, in quanto sembra poco ragionevole pensare ad un'utilità infinita. Abbiamo, dunque, $a(\omega) \subseteq [a_{min}, a_{max}]$.
Definiamo ora il **linguaggio** dell'applicazione, $L = \{a \mid a \text{ è } un'asserzione\}$.
Le asserzioni di L separano anche i mondi possibili: diciamo che due mondi possibili sono distinti se e solo se esiste un'asserzione che distingue tra essi. Questo equivale ad introdurre una relazione di equivalenza in ω.
L ci permette anche di introdurre una topologia su ω, ovvero la *topologia debole* (cioè la topologia meno fine per cui ogni $a \in L$ è continua). Ne segue che le funzioni $\{a(\omega) \mid a \in L\}$ giocano il ruolo di coordinate, e che ω è omeomorficamente immerso in $K = \prod_{a \in L} [a_{min}, a_{max}]$. A questo punto possiamo ingrandire Ω aggiungendoci gli stati ideali, cioè considerando $\overline{\Omega}_K$.
Il nuovo Ω' così costruito ha il vantaggio di essere uno spazio T_2 compatto.

Ora possiamo estendere lo spazio dei mondi possibili, introducendo lo spazio Σ, che è l'insieme delle misure di probabilità su Ω. Abbiamo che Σ è compatto e convesso nello spazio lineare (topologicizzato) delle misure di probabilità. I punti di Ω sono gli estremi di Σ, e li chiamiamo **stati puri**. I punti di Σ li chiamiamo, invece, **stati misti**. Questi sono le possibili credenze di un agente bayesiano (che ha una conoscenza dei mondi possibili mediante probabilità su Ω). Su Σ si possono estendere le funzioni di rendita in modo continuo e affine.
Diamo ora una serie di definizioni riguardanti le asserzioni.

Definizione 2.1. *Un'asserzione si dice* ***semplice*** *se* $a(\omega) = \{a_{min}, a_{max}\}$. *In tal caso, quando* $a(\omega) = a_{max}$ *diciamo che l'asserzione è vera, mentre quando* $a(\omega) = a_{min}$ *diciamo che l'asserzione è falsa.*

Chiamiamo ***peso*** *di un'asserzione la quantità* $a_{max} - a_{min}$, *che è una misura quantitativa dell'****enfasi*** *associata ad una sentenza.*

Chiamiamo ***livello*** *di un'asserzione il numero* λ *tale che* $\lambda a_{max} + (1 - \lambda) a_{min} = 0$. *Per un agente bayesiano il livello rappresenta il minimo grado di fiducia nella sentenza necessario per fare l'asserzione.*

Diciamo ***simili*** *due asserzioni che differiscono solo per scalatura (moltiplicazione per una costante positiva) e traslazione (somma di una costante reale).*

[2]Scegliamo i numeri reali come insieme descrittivo della nostra utilità

Osserviamo che la similitudine definisce una relazione di equivalenza tra asserzioni. Per ogni classe di equivalenza possiamo sempre trovare un rappresentante per cui $a_{max} = 1$ e $a_{min} = 0$. Asserzioni di questo tipo si diranno **standardizzate**.

Possiamo ora mettere in evidenza qual è il punto cruciale nell'interpretazione di Giles della funzione di appartenenza: *la funzione di verità di una sentenza sfocata coincide con una funzione di rendita di un'asserzione standardizzata.* Questa relazione, per di più, vale in ogni mondo possibile, sia esso stato puro o misto.
Inoltre, il grado di appartenenza di x a F è definito come il grado di verità della sentenza "x ha la proprietà P_F", e questo $\forall x \in X$, dove X è l'universo del discorso.

2.3.3 Critiche

Diamo ora una lettura critica dell'interpretazione di Giles.
La prima cosa che salta agli occhi è la visione pragmatica, utilitaristica della verità che viene abbracciata.[3] Quello che è poco chiaro è in che senso si debba intendere questa utilità. Una prima, grossolana, risposta potrebbe essere in termini di denaro, ma la monetizzazione è avulsa dal contesto della verità e delle credenze.
In effetti Giles sposa un'interpretazione diversa. Egli ritiene che una misura adeguata dell'utilità sia quella di soddisfazione personale. Questo introduce un forte relativismo in senso individualista, in quanto ciò che dà soddisfazione varia in misura consistente da persona a persona. Giles cerca di uscire da questo *cul de sac* affermando che in una "società normale" dire la verità comporta un guadagno di prestigio, mentre dire menzogne ne comporta una perdita. In quest'affermazione ci sono molti elementi ambigui. Prima di tutto, non è assolutamente chiaro cosa significhi "società normale", visto che la società è un qualcosa di molto dinamico, estremamente mutevole e difficilissimo da incastrare in un qualche schema interpretativo. Inoltre nella sua asserzione c'è una contraddizione sul concetto di verità: prima essa viene identificata con una qualche forma di utilità (visione molto relativizzante), ma poi, per giustificare l'oggettivizzazione della soddisfazione in termini di prestigio, viene reintrodotto dalla finestra il concetto di verità "assoluta" (celato nella locuzione "dire la verità"). In realtà, se in un contesto pragmatico identifichiamo l'utilità personale con il prestigio, ne segue che la verità viene a coincidere con le aspettative della società.
Inoltre identificare con il prestigio sociale la soddisfazione che si può avere

[3] Vedi sezione 4.2.5

dal fare certe asserzioni è troppo semplicistico: ogni enunciato affermato porta modifiche nella stima di singole persone e di gruppi in modo complesso e indistricabile.
Infine, un'ultimo problema che si presenta nell'interpretazione utilitaristica del significato di un'asserzione è cosa rappresentino i valori della funzione di rendita e la loro assegnazione. Il meccanismo che Giles suggerisce in questo caso è un metodo di stima che potremmo chiamare il "metodo della corruzione". L'idea è quella di offrire ricompense per asserire enunciati di utilità negativa, cosicché l'utilità sarà tanto minore quanto maggiore è la ricompensa necessaria. Analogamente si procede per stabilire le utilità positive, imponendo penalità invece che ricompense. Il metodo usato è però molto debole: le ricompense implicano l'utilizzo di qualche forma di denaro, mentre è abbastanza evidente che ci sono asserzioni che "non hanno prezzo" (come parlare male di una persona che si ama).

Una cosa è chiara: i concetti di utilità e di soddisfazione dipendono fortemente dall'individuo e dal contesto socio–storico–culturale e personale in cui si considera l'asserzione. Questo relativismo non è assolutamente eliminabile facendo ricorso a locuzioni prive di alcun significato quali "società media" o "significato medio".

2.4 Interpretazione come misurazione

Un altra cornice interpretativa della funzione di appartenenza è quella della teoria della misura. Dal punto di vista generale, quello che si fa è considerare una struttura algebrica totalmente ordinata, che esprime un ordinamento di preferenza, e di mapparla in una scala numerica. Questo approccio, adottato dai turchi Bilgiç e Türkşen in [5], parte dalla distinzione di due ordini di problemi: la misura dell'appartenenza e l'ordinamento delle proprietà.

2.4.1 La misura di appartenenza

Qui si è interessati a misurare il grado con cui gli oggetti di una certa collezione A appartengono ad un insieme sfocato F. L'idea di fondo è di considerare una relazione binaria $\succeq_A$ in A che faccia un confronto sulla "F–ità" degli elementi di A. Diciamo che

$$a \succeq_A b \Leftrightarrow a \in F \textit{ almeno quanto } b \in F.$$

Se ora si fa un'ipotesi di limitatezza, ovvero si suppone l'esistenza di $a^+ \in A$ e $a^- \in A$ tali che $a^+ \succeq_A a \succeq_A a^-$, $\forall a \in A$ (cioè si suppone che esistano elementi totalmente F e per nulla F), allora si può dimostrare che esiste

un'unica scala ordinale (in cui non è permesso fare manipolazioni numeriche) in cui mappare la struttura algebrica $\langle A, \succeq_A \rangle$. Per poter avere una scala intervallare (cioè l'intervallo reale $[0, 1]$) è necessario ipotizzare la possibilità di confrontare coppie di elementi: $a \succeq_A b$ *più di quanto* $c \succeq_A d$.
In tal caso esiste $\mu_F : A \to [0, 1]$ tale che

$$a \succeq_A b \Leftrightarrow \mu_F(a) \geq \mu_F(b)$$

e

$$(a, b) \succeq_A (c, d) \Leftrightarrow \mu_F(a) - \mu_F(b) \geq \mu_F(c) - \mu_F(d).$$

2.4.2 Ordinamento delle proprietà

Qui siamo interessati a confrontare più attributi sfocati relativi ad un singolo elemento. L'ottica usata è di tipo comparativo: introduciamo una relazione d'ordine nell'insieme $\mathcal{F}_a = \{F_1, F_2, \ldots\}$ degli attributi connessi con l'elemento a, cioè

$$F_i \succeq_a F_j \Leftrightarrow a \text{ è più } F_i \text{ di quanto sia } F_j.$$

Questo si può formalizzare introducendo la struttura algebrica $\langle \mathcal{F}_a, \succeq_a, \bigoplus_a \rangle$, dove $\bigoplus_a$ è un qualche modello di disgiunzione di due termini sfocati.
In questo modo possiamo avere una rappresentazione mediante una scala ordinale. L'introduzione di una scala numerica assoluta richiede, invece, l'assunzione di alcuni assiomi, ovvero l'assioma di limitatezza (in $\mathcal{F}_a$ c'è un massimo e un minimo relativamente a $\succeq_a$) e l'assioma di archimedeità ($\forall F_i, F_j \in \mathcal{F}_a,\ \exists m \in \mathbb{N}\ t.c.\ F_i^{(m)} \succeq_a F_j$ dove $F^{(1)} = F$ e $F^{(m)} = F^{(m-1)} \bigoplus_a F$).
In tal caso si dimostra che esiste una funzione $\nu_a : \mathcal{F}_a \to [0, 1]$ tale che

$$F_i \succeq_a F_j \Leftrightarrow \nu_a(F_i) \geq \nu_a(F_j)$$

.

2.4.3 Conclusione e osservazioni

Una volta definite le due scale sopra citate, è necessario trovare un modo per combinarle insieme, in quanto le due funzioni a valori in $[0, 1]$ non misurano le stesse quantità e quindi non sono direttamente confrontabili. L'idea è che i due problemi si possono includere nella stessa struttura di semigruppo limitato, che vengono poi mappati in una scala. Gli assiomi che si scelgono sono cruciali per determinare quali proprietà avrà la scala: in generale, a meno di non imporre l'archimedeità, essa sarà di tipo ordinale, cioè tale da permettere solo il confronto e non operazioni numeriche.

L'idea che soggiace a quest'interpretazione è interessante: si pensa che il ragionamento umano funzioni essenzialmente a confronti, a paragoni tra oggetti, che sono di tipo qualitativo e non quantitativo. Questo significa che in generale possiamo sperare di avere a disposizione solo scale ordinali, che precludono, quindi, ogni possibilità di fare medie. Inoltre, l'assioma di Archimede sembra decisamente ingiustificato, in quanto esso richiede di poter intervenire sugli ordinamenti di preferenza attraverso somme finite di quantità dei singoli attributi. Per esempio, se dico che Gianni è più simpatico che intelligente, secondo questo assioma dovrebbe esistere una quantità finita di intelligenza che, posseduta da Gianni, lo renderebbe tanto simpatico quanto intelligente. Tutto ciò suona strano: è infatti poco chiaro come sia possibile quantificare (o misurare) attributi come intelligenza o simpatia. Per di più, si può dubitare anche del fatto che sia possibile confrontare sempre tra loro attributi diversi (anche se misurabili). Per esempio, voler confrontare l'altezza con la grossezza ha poco senso: cosa vuol dire che Gianni è più alto di quanto è grosso?

3 La metafisica della funzione di appartenenza

In questa sezione cercheremo di dare qualche (vaga) idea di quali problemi siano soggiacenti al dare un'interpretazione della funzione di appartenenza. Due sono gli scogli principali in cui ci si imbatte: da un lato il valore scientifico della logica *fuzzy* nel cercare di descrivere il ragionamento, dall'altro il concetto di verità.

3.1 Una questione di logica (del ragionamento)

Abbiamo già visto in precedenza come la teoria degli insiemi, sia quella classica che quella sfocata, sia equivalente a una teoria logica (cfr 1.3.9). Quindi, un insieme corrisponde ad una proposizione e la funzione di appartenenza di un insieme corrisponde alla funzione che assegna ad una proposizione il suo valore di verità.
Chiedersi il significato del concetto di "grado di appartenenza" equivale a chiedersi il significato di "grado di verità". Ma qui la strada è molto insidiosa, poiché si richiede, di fatto, di avere una chiara idea di cosa sia la verità, almeno da un punto di vista operativo. Inoltre c'è bisogno di capire come sia possibile attribuire ad una proposizione un certo valore di verità, che significato ha questa attribuzione e in quale senso essa può essere a gradi. Problemi, questi, tutt'altro che banali: 2500 anni di filosofia e 400 anni di scienza hanno provato in tutti i modi a risolverli, ma senza grossi esiti. Ver-

rebbe quasi da pensare che non sia possibile dare una risposta definitiva e che, forse, ognuno è libero di credere in ciò che vuole, anche rispetto a questi temi. O forse il nocciolo del problema è proprio una questione di credenza, anche se questa affermazione è in contraddizione con quella precedente (ma il mio spirito occidentale, totalitario ed irrequieto, fa fatica ad accettare l'assenza di risposte).

Parallelamente alla questione della verità, che tratteremo nei prossimi paragrafi un po' meglio, c'è anche una questione epistemologica: quale sia il rapporto tra la logica sfocata e il ragionamento umano. Quest'ultima è davvero un buon modello per descrivere il nostro modo di pensare? Funziona davvero sempre? O solo in certe situazioni? E se non funziona davvero bene, esiste un processo conoscibile soggiacente al nostro pensiero, oppure esso è troppo complicato per poter essere compreso a fondo?
A queste domande, purtroppo, per scarse conoscenze e competenze, non daremo molte risposte. Questo è ambito delle neonate scienze cognitive, dell'intelligenza artificiale, delle neuroscienze. Questi settori della scienza cercano delle risposte con i metodi della sperimentazione e dell'induzione. Qui possiamo solo azzardare qualche speculazione filosofica, priva di alcun valore sperimentale e di alcuna evidenza.

3.2 Il cammino della verità

Nel paragrafo precedente abbiamo accennato ad una di quelle famigerate domande che da sempre turbano i sogni degli uomini: "cos'è la verità?" Lungi da noi tentare di dare una risposta, e anche cercare di fare una rassegna completa di tutti i tentativi di soluzione che si sono susseguiti nei secoli, anche perchè far questo richiederebbe svariati libri e svariati anni di lavoro.

Una prima distinzione che si può fare è tra verità logica e verità metalogica. La **verità logica** è coerenza all'interno di un certo sistema (formale), la **verità metalogica** cerca, invece, di penetrare il senso ultimo di questo concetto. Di verità logica parleremo più avanti, mostrando come questo concetto sia, anch'esso, qualcosa di estremamente fumoso. Del secondo, la verità metalogica, la fumosità appare più evidente.
Nelle sottosezioni seguenti discuteremo brevemente alcune delle interpretazioni (metalogiche) che sono state date della verità, e lo faremo in un modo un po' asettico, senza fare digressioni sulla storia della filosofia, onde evitare di abbattere troppi alberi. Prima di fare questo, però, è bene chiarire quale sia l'ambito di applicazione di questo concetto: la verità riguarda le proposizioni che si possono formare in un certo linguaggio, anzi, le asserzioni che si possono fare in tale linguaggio. Una volta asserita una sentenza, è

lecito chiedersi in quale senso essa possa essere vera. Meglio cautamente evitare di allargare il campo ai pensieri, poiché il pensiero è, in sé, qualcosa di estremamente evanescente ed indefinito, e restringersi, quindi, ad un ambito più concreto.

3.2.1 Verità come corrispondenza

La visione della verità come corrispondenza tra pensiero e realtà, è quella che potremo chiamare la visione "classica". Secondo questo punto di vista, un'asserzione è vera quando è in accordo con la realtà. Questo, tutto sommato, è anche il punto di vista della scienza, che ritiene vere (o meglio, vere momentaneamente) le asserzioni (scientifiche) che hanno una qualche verifica sperimentale.
Per quanto riguarda il punto di vista più generale, nel cercare di trovare un accordo tra pensiero e realtà si celano delle insidiose trappole. Intanto, non è chiaro che cosa sia la realtà, né come essa si possa conoscere. Diciamo che, per fare questo, stabiliamo dei criteri di conoscenza, facciamo delle osservazioni e in questo modo ci costruiamo delle immagini mentali (dei pensieri) di essa. Poi compariamo, in qualche modo, questi pensieri con le asserzioni fatte e stabiliamo se sono in accordo oppure no. Il problema, qui, è che noi stiamo facendo un confronto tra nostri pensieri . Nessuno ci garantisce che l'immagine mentale che ci siamo costruiti della realtà, mediante certi criteri, sia la Realtà nella sua accezione più ampia (e sconosciuta). In effetti, tale immagine è la nostra percezione della realtà, il nostro personale punto di vista. Quindi c'è una spostamento da oggettivo a soggettivo che, di fatto, tende ad invalidare l'idea di corrispondenza verità – realtà in senso assoluto. Inoltre c'è anche un altro problema nel paragonare realtà e asserzioni, e cioè il concetto di somiglianza. Infatti, se noi affermiamo che un'asserzione è vera quando è simile alla realtà, allora dobbiamo aver chiaro anche cosa significhi "essere simile". Per i concetti matematici è abbastanza facile, ma per asserzioni arbitrarie il concetto di somiglianza è molto vago.

Meglio fa la scienza, che sembra cercare una sorta di accordo universale tra immagini soggettive della realtà, restringendo il campo a quelle asserzioni che corrispondono a fatti misurabili. Sulle misure, che sono procedure (approssimate) ripetibili da chiunque, c'è sicuramente un accordo (quasi) universale tra gli essere umani. Bene, vien da pensare, la scienza ha dato una risposta al problema della verità! Ma così non è: le asserzioni che corrispondo a qualcosa di misurabile sono una frazione molto piccola; restano escluse tutte le asserzioni morali, etiche, politiche, personali, quelle che corrispondono a fatti unici, e molte altre.

3.2.2 Verità come conformità a criteri

Un'interpretazione non classica della verità è quella che asserisce che essa altro non è che conformità delle proposizioni a certi criteri. Però, questo equivale ad affermare che sono vere quelle asserzioni le quali sono coerenti all'interno di un certo sistema (formale) che ha questi criteri come assiomi. Qui però ricadiamo in una visione logica della verità che, come vedremo più avanti, ha dei grossi difetti. In particolare è essenzialmente impossibile definire dei criteri che possano dare una risposta sul valore di verità di ogni proposizione.

3.2.3 Verità come accordo universale

Un'altra possibile visione della verità è quella di accordo universale tra esseri umani. Quindi, è vero tutto ciò che viene ritenuto tale da tutti. La prospettiva sembra interessante, ma si scontra con l'inevitabile questione operativa di come si faccia a giungere ad un tale accordo. Sembra infatti un compito alquanto arduo trovare una procedura che possa determinare un accordo universale su questioni di tipo morale, etico, politico, religioso e così via.
Il dominio dei fatti veri, anche in questo caso, sembra restringersi al campo della scienza, visto che parrebbe che l'accordo si possa trovare solo là dove si possano fare misure secondo procedure condivisibili universalmente. Qui però, risulta una visione diversa della scienza, non come descrizione verosimile della realtà, ma come accordo comune degli uomini su ciò che crediamo essere la realtà. Cioè la scienza sarebbe l'unico credo universale possibile.

3.2.4 Verità come credenza

Un'interpretazione, che sposta il punto di vista da oggettivo a soggettivo, è quella che definisce la verità come credenza individuale. Secondo questo punto di vista, è vero ciò che noi crediamo tale. Questa è una visione molto relativa, nel senso che ora la verità dipende fortemente dal soggetto, dalla sua esperienza, dalle sue conoscenze, dalle sue credenze. Soffermiamoci su questo esempio: consideriamo le verità della biologia (cioè il corpus di conoscenze della biologia che è ritenuto verosimile allo stato attuale); è chiaro che un uomo occidentale di media cultura ha qualche idea su quali esse siano. Ma un boscimano, che non ha avuto troppi contatti con il nostro mondo, non sa che la malaria (per fare un esempio) è causata da un battere, ma potrebbe ritenere che sia una punizione divina (è un esempio assolutamente arbitrario, non abbiamo idea di quali siano le credenze di un boscimano). Ora, ai nostri occhi, la verità è un'altra, ma per lui è proprio *vero* che c'è un qualche dio

adirato che lo sta punendo!
Nel pensare la verità come credenza, quindi, la si vede come una categoria storico – socio – culturale. Questi concetti li riprenderemo più avanti, quando parleremo del rapporto tra verità globale e locale.

3.2.5 Verità come utilità

La visione pragmatica della verità è quella di pensarla come utilità. Questo concetto risale a William James, ed è fatto proprio da Giles nella sua interpretazione utilitaristica della funzione di appartenenza. Secondo questo punto di vista, un'asserzione è vera se comporta per noi una certa utilità nell'asserirla. Qui il concetto di utilità corrisponde ad un miglioramento della condizione vitale dell'individuo, quindi "la verità delle nostre idee significa la loro capacità di operare"[4].
Questa visione della verità è radicalmente soggettiva, cioè il fatto che un'asserzione sia vera dipende in modo fortissimo dall'individuo che l'asserisce. In realtà i pragmatici ammorbidiscono questa posizione, aggiungendo che la verità di un'idea si concretizza nel processo di verificazione fattuale (meglio sperimentale) di quest'ultima, processo che dal punto di vista dell'intelletto richiede comunque coerenza e consistenza. Questo non sposta il problema, il pragmatismo scardina ogni oggettivismo logico dal concetto di verità e introduce il problema del confronto e della sintesi dei punti di vista individuali. Anche qui l'unica metodologia riconosciuta è quella della scienza, con tutte le limitazioni cui essa è sottoposta.

3.3 La verità della logica

Nella sezione precedente abbiamo visto una rassegna (assolutamente incompleta) di come si sia cercato nella storia della filosofia di interpretare e definire il concetto di verità.
Ma questo concetto appartiene anche al dominio della logica. Cosa si intende in logica con verità? Essenzialmente dimostrabilità.
La logica classica, nelle sue versioni più raffinate di Hilbert e Gödel (per citarne alcuni) funziona attraverso i sistemi formali. Un sistema formale è, approssimativamente, un insieme di simboli, di regole di composizione, di assiomi e di regole di deduzione, ovvero un insieme di proposizioni ben formate (scritte in un qualche alfabeto e secondo una certa sintassi), di cui se ne assumono in partenza alcune vere (gli assiomi). Questo è tutto: attraverso le regole di deduzione formale si determinano quali frasi sono vere (cioè quelle

[4] William James, Pragmatismo, 1907

deducibili dagli assiomi) e quali false (quelle di cui è deducibile il contrario). Sembrerebbe, quindi, che in questo modo l'unico lavoro da fare, una volta dati gli elementi base, sia quello di trovare tutte le (infinite) frasi vere, lavoro questo che può benissimo essere svolto da una macchina calcolatrice, programmata secondo le regole sintattiche e deduttive del sistema formale. Non proprio! Accade che ogni sistema formale porta in suo seno delle proposizioni che non sono né vere né false, cioè proposizioni non dimostrabili all'interno del sistema. Questo è essenzialmente il teorema di Gödel.

Per la logica, quindi, la verità è coerenza all'interno di un certo sistema di regole (coerenza non sempre dimostrabile), ma nulla si può dire sugli assiomi, la loro "verità" trascende la logica e si assesta nel campo della metalogica. Certo, si può costruire un sistema formale allargato, in cui gli assiomi del primo siano proposizioni deducibili di quest'ultimo, ma questo non fa altro che spostare il problema sui nuovi assiomi.
Tutto questo ci lascia a bocca asciutta: noi vorremo avere a che fare con una verità che sia universale, con una sua definizione capace di dire sempre se una proposizione è vera o è falsa.
Ma il teorema di Gödel, nella sua variante del lavoro di Tarski, ci dice che le cose mai e poi mai potranno essere così: il concetto di verità è indefinibile, sfuggente, inconcepibile nella sua pienezza (ammesso che *esista* una verità nella sua pienezza).

3.3.1 L'indefinibilità della verità

Il concetto di verità presenta da subito serie difficoltà, e porta a difficili paradossi. Il più famoso è indubbiamente il paradosso del mentitore, in cui un cretese affermava che "i cretesi mentono sempre". È chiaro che, se l'affermazione è vera, allora deve essere falsa, poiché il cretese deve aver mentito; mentre se essa è falsa, allora è vera, in quanto il cretese ha mentito.
Una versione equivalente del paradosso del mentitore, spogliata del suo appealing storico, è data dal seguente enunciato:

QUESTO ENUNCIATO È NON VERO[5]

Infatti qui si incorre nella stessa contraddizione di sopra. La prima cosa che appare evidente nella sentenza precedente è una sorta di autoreferenzialità che porta velocemente ad un regresso all'infinito: se a *QUESTO ENUNCIATO* sostituiamo l'enunciato stesso, cioè *"QUESTO ENUNCIATO È NON VERO"*, otteniamo *"QUESTO ENUNCIATO È NON VERO"*

[5] Non è stato usato il termine falso in quanto si potrebbe obbiettare che l'enunciato in questione potrebbe non avere alcun valore definito di verità.

È NON VERO, e continuando così arriveremo ad una successione di $\aleph_0$ " seguita da una successione di $\aleph_0$ *" È NON VERO*, cioè

...""""..." È NON VERO" È NON VERO" È NON VERO

Ora, non c'è niente di male nel regresso infinito in sé, tant'è vero che praticamente ogni proposizione porta ad una tale situazione[6], quindi il problema sta nella seconda parte dell'enunciato, cioè nel *"NON È VERO"*.
Infatti, per comprendere appieno il significato dell'enunciato, dobbiamo dare una definizione di verità. Purtroppo, il concetto di verità è indefinibile. Qui di seguito daremo un accenno di dimostrazione.

Dire che esiste una definizione finita di verità significa affermare che esiste una macchina di Turing M (cioè un algoritmo) che accetta in entrata una proposizione e stabilisce in uscita se tale proposizione è vera oppure no. Consideriamo ora, non senza un certo cinismo, la seguente proposizione K: *''Questa macchina della verità, costruita in base a queste istruzioni [elenco], non dirà che questa proposizione è vera".* Che succede se facciamo analizzare da M la proposizione K? M non può dire che la proposizione è vera, altrimenti K sarebbe falsa, né M può dire che K è falsa, altrimenti K sarebbe vera. Sembra proprio che M non possa emettere un verdetto per K: magari entra in un ciclo infinito, o magari si rompe, ma di sicuro non darà mai alcuna risposta. Ma noi, che siamo osservatori esterni, dobbiamo necessariamente concludere che K è vera, infatti la macchina M non ha detto che K è vera!
Abbiamo quindi trovato una proposizione vera che la macchina M non sa riconoscere come tale. Ciò mostra, approssimativamente, che la verità è indefinibile mediante un numero finito di simboli.

3.3.2 Verità come processo infinito di definizione

Un possibile modo di vedere il concetto di verità è pensarla come un processo infinito che consiste nella sua continua definizione e ridefinizione. L'idea è quella di estendere una sua definizione finita in modo che essa conglobi man mano sempre più enunciati veri. Una macchina della verità M definita tramite la sua descrizione S non può decidere su enunciati riguardanti M.

[6]Infatti si potrebbe pensare, così come ha fatto Bradley, che ogni descrizione del mondo consista di oggetti e relazioni che questi oggetti soddisfano. Quindi, dati due oggetti a e b e data una relazione L che i due oggetti soddisfano, possiamo introdurre un'altra relazione, che chiamiamo di soddisfazione S, che L, a e b soddisfano. Questo si potrebbe reiterare per S, L, a, e b, e così via. Ma questo equivale alla seguente successione di proposizioni: $L(a,b)$; "$L(a,b)$" è vera; ""$L(a,b)$" è vera" è vera; ..., che è un regresso all'infinito!

comunque, possiamo costruire una macchina M', la cui descrizione S' estenda S, capace di decidere su enunciati inerenti M.
Se S_0 è la descrizione iniziale della verità da cui partiamo, allora possiamo costruire una successione di descrizioni S_n, con S_{n+1} estensione di S_n nel modo suddetto. Ma questo processo non solo è chiaramente infinito, ma può essere spinto ben oltre ω: se S_ω è la descrizione della verità che fa riferimento alle successione di S_n, allora anch'essa può essere descritta in modo finito ed è quindi estendibile con $S_{\omega+1}$[7]. Quindi ogni descrizione finita della verità porta ad un regresso infinito, e in tale regresso si potrebbe individuare l'essenza stessa della verità.

3.4 Locale contro globale

In un articolo di Bandler e Mancini (precisamente in [22]) viene fatta un'interessante distinzione tra il concetto di verità globale e quello di verità locale. Il loro punto di partenza consiste nel sottolineare come il pensiero logico e razionale sia solo una parte molto limitata dell'attivita mentale degli esseri umani. Inoltre, tale attività non sempre segue delle regole di deduzione coerenti, anzi, spesso i ragionamenti mostrano contraddizioni interne. Per di più, ragionamenti su ambiti diversi seguono sovente logiche diverse.
Queste osservazioni li spingono a fare una distinzione tra il concetto di verità globale, pensato come l'insieme di tutte le proposizioni vere, e il concetto di verità locale, pensato come un insieme di assiomi e regole di deduzione ritenute vere che modellano un qualche angolo (pseudo)razionale della nostra mente.
Analizziamo questa posizione. Il concetto di verità locale implica subito il vedere la verità come credenza in un certo sistema di assiomi e regole (e quindi come credenza in tutte le conseguenze di questo sistema logico). Inoltre, all'interno di un essere umano possono coesistere svariati sistemi, anche in contraddizione tra di loro. Vero è dunque ciò che riteniamo di poter dimostrare a partire da qualche affermazione in cui crediamo, e con le regole che ci sembrano più consone.
Aleggia in questa descrizione lo spettro del disaccordo globale, in quanto ogni individuo sembra racchiuso in un guscio di incomunicabilità. Ma non dobbiamo dimenticarci che nelle credenze di un uomo incidono sia le esperienze personali che la visione comune della società in cui esso è nato e vive. La verità è quindi ridotta ad una categoria socio – storico – individuale, e (finalmente) privata di quel manto di assoluto e di trascendenza metafisica. Tale categoria, inoltre, si evolve sia da un punto di vista storico sia da un

[7] Una bella domanda è chiedersi se si possa superare ogni cardinale infinito.

punto di vista personale, in quanto nuove esperienze e confronti con altre persone mutano le credenze "di base", quelle che si concretizzano negli assiomi (che sono comunque una proprietà dei modelli descrittivi e non della nostra mente). In effetti, ognuno di noi ha esperito nel corso della sua esistenza un'evoluzione delle proprie credenze, ovvero di ciò che riteneva vero. Anche a livello storico e di confronto fra civiltà diverse, si possono facilmente dare parecchi esempi di dissonanza e di evoluzione di ciò che viene comunemente ritenuto vero.
Se poi esista una verità metafisica, globale e assoluta, non è dato saperlo con certezza; anche questo è un'enunciato a cui possiamo credere o no. Questa posizione porta, dunque, ad una demistificazione dell'esistenza, sciogliendola dalle catene dell'assoluto, a favore di una visione della vita che abbraccia un concetto radicale di libertà.

3.5 La verità in grigio

Dopo la lunga rassegna sull'interpretazione della verità nella filosofia e nella logica classica, veniamo al succo del discorso, cioè al confronto tra la visione classica, dicotomica, della verità e quella sfocata, chiaroscurale. Nella logica aristotelica[8], che di fatto è a fondamento della matematica e di tutta la scienza, la verità è vista come una proprietà "in bianco e nero" delle asserzioni: un'enunciato o è vero o è falso (meglio non vero). Ma per la maggior parte degli enunciati riguardanti il mondo ciò crea non pochi problemi. L'asserzione "Gianni è alto" sembra molto difficile da classificare come totalmente vera o totalmente falsa; bisognerebbe define una soglia per l'altezza, ma questo è un meccanismo molto artificioso che lascia alquanto insoddisfatti. Meglio, indubbiamente, attribuirvi un certo grado di verità. Questo ci porta alla logica sfocata, in cui la funzione di verità prende valori in tutto l'intervallo reale $[0,1]$. Il concetto di verità classico diventa, quindi, un caso molto particolare di quello sfocato, applicabile agli enunciati (artificiosi) della matematica, o ad asserzioni che incorporano in loro stesse già una soglia di verità ben definita (del tipo "Gianni è più alto di 1.80 m"; va notato che una risposta affermativa al 100% richiede una misurazione preventiva).
La logica sfocata è anche preferibile nel maneggiare affermazioni quali "questa è una mela", di cui sembrerebbe più facile dire se è vera oppure no. Immaginiamo però che la mela venga mangiata, morso dopo morso. Quando cessa di essere "mela", per diventare "non mela" (torsolo)? è veramente possibile

[8] In realtà Aristotele ammetteva un terzo valore di verità: "possibile"

dare una demarcazione così netta tra queste due entità? O forse il passaggio avviene in modo graduale, sfumato, sfocato[9]?

Problemi connessi con la visione sfocata della verità sono quello di interpretare il significato di grado di verità, quello di capire se e che senso abbiano i valor numerici, quello di capire come poter attribuire questi valori.

3.5.1 La verità come intensità di credenza

La logica sfocata trova una sua naturale collocazione in una visione locale della verità, intesa come credenza in certi enunciati. Infatti, quando si parla di credenza è molto difficile porsi in un'ottica binaria del "credo" / "non-credo". Un'attributo connaturato alla credenza è la sua intensità. Così, si può credere molto intensamente in un'asserzione a e meno fortemente in un'asserzione b.

Ricapitolando, abbiamo mostrato la propensione verso una teoria locale della verità, ove non interessa sapere se una proposizione è vera o no in un qualche senso assoluto, ma dove l'interesse è concentrato su un modello di una parte delle credenze di un individuo, assieme alle regole di inferenza che esso usa in quel contesto. La logica sfocata si presenta, quindi, come il modello naturale in molti di questi casi, visto che un individuo crede in proposizioni diverse con intensità diversa[10].
Differentemente da quanto fa Giles, in questo modo non serve supporre che la forza con cui si crede in un'asserzione sia una riparamentrizzazione di una qualche utilità associata ad essa. Non ce n'é alcun bisogno, in quanto l'interesse non è di trovare un modello unico di descrizione del pensiero o della verità, ma di farlo localmente, su zone ristrette dell'attività mentale.

3.5.2 Dare i numeri

Un'interpretazione soggettiva della funzione di verità è la più idonea, in quanto il grado di credenza di un'asserzione varia da individuo a individuo. Più interessante è invece capire che significato dare ai valori che essa assume. Sembra molto difficile poter quantificare qualcosa di molto fumoso come la forza con cui si crede in una certa asserzione. Riprendendo le obiezioni sollevate parlando in A.2.5 dell'interpretazione della funzione di appartenenza come misurazione, sembra più ragionevole ammettere che l'unica operazione fattibile con i gradi di credenza sia il confronto: la sola cosa che siamo capaci

[9] L'esempio è preso dal libro di Bart Kosko, "fuzzy – pensiero"

[10] In questa esposizione abbiamo usato con una certa disinvoltura i termini proposizione, enunciato, asserto, frase, sentenza, in modo equivalente. In realtà hanno diverse sfumature di significato, sacrificate all'esigenza dello stile (misero).

di fare è stabilire se crediamo più in a che in b, ma non sappiamo misurare con precisione quanto di più.
La scelta dell'intervallo $[0, 1]$, d'altra parte, non sembra essere problematica, a patto di ammettere che l'intensità con cui si crede sia necessariamente limitata, fatto questo che sembra ragionevole, in quanto il numero di proposizioni che una persona ha in mente, per quanto grande, è comunque finito.
Inoltre, c'è anche un'altro problema, legato questa volta al confrontare tra loro asserzioni diverse. Ha poco senso chiedersi se crediamo di più a "Gianni è alto" piuttosto che a "Dio esiste". Anzi, i gradi di credenza di queste frasi sembrano inconfrontabili tra loro. Da questa empasse si può uscire in due modi: o scegliendo un codominio diverso per la funzione di verità (ma anche qui, forse, si fanno semplificazioni eccessive), che sia solo parzialmente ordinato, o con il punto di vista locale della verità. Quello che si può dire in questo modo è che le due asserzioni di sopra corrispondono a due modelli distinti, e che quindi confrontarle tra loro è un'azione priva di significato.

Resta il problema di capire quale sia il senso dei valori numerici. La cosa meno impegnativa che si può dire su essi è che sono delle semplici convenzioni per esprimere l'ordinamento delle intensità di credenza. Però così ci si preclude ogni possibile operazione di media, che nelle applicazioni pratiche sono molto utili. In effetti c'è un ambito delle attività umane in cui si usano principi sfocati e tecniche di media (discutibili) da un bel pezzo: le valutazioni scolastiche[11]. Quello che si può dire è che in questo campo l'uso delle medie è alquanto arbitrario, ma va da sé che è pure utile.
Una possibile soluzione a questo dilemma è di considerare lecito l'utilizzo delle operazioni aritmetiche con i gradi di fiducia solo in quei modelli su cui c'è concordanza interpersonale, quindi, su quelli che riguardano questioni misurabili fisicamente. In questo caso, infatti, i numeri sembrano avere un qualche senso oggettivo, che emerge dal far la media di dati privi di gran significato. Ma questo a patto di usare gli stessi criteri nel mappare la comparazione nell'intervallo numerico. Questa restrizione, peraltro, dovrebbe essere sufficiente per salvare "capra e cavoli" nelle applicazioni pratiche della logica sfocata.

3.5.3 Pensiero svelato?

È nostra convinzione che sia impossibile trovare una descrizione logico – matematica del pensiero umano. In primo luogo, esso è estremamente complesso, forse più di ogni altra cosa in natura, sicuramente più degli evoluti intarsi del fumo di una sigaretta o delle turbolenze nei fluidi. Inoltre, molte

[11] Vedi "dilemmi docimologici", in [28]

zone della nostra mente sono quanto di più irrazionale e imprevedibile si possa immaginare, anche se non privi di una qualche forma di coerenza sottesa, capace di produrre arte e illuminazioni sul mondo. Ma da qui ad affermare che questa coerenza è di tipo razionale, o rappresentabile secondo schemi razionali, il salto non è da poco. Infine, nelle nostre menti sembra esserci una frammentazione delle credenze, che spesso si trovano anche in conflitto fra loro.

Tutto questo ci fa propendere per limitarci ad una visione locale e a descrizioni locali del nostro pensiero. In questo, una logica a chiaroscuri ci sembra molto più appropriata della logica dicotomica, in quanto in grado di modellare meglio le diverse intensità di fiducia sugli assiomi cardine del nostro corpus di credenze.
La ricerca di un modello unico di descrizione del pensiero, al contrario, fa capo ad una visione della scienza fondata sulla ricerca della semplicità e sulla fuga ad ogni costo dalla complessità, che viene dipinta sempre come quantitativa e non qualitativa. Essa, invece, sembra essere una proprietà intrinseca e imprescindibile di molti sistemi reali, primo fra tutti il pensiero.

Riferimenti bibliografici

[1] Anderson J. R. (1990). *The Adaptive Character of Thought*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[2] Antiseri D., Reale G. (1996). *Il Pensiero Occidentale dalle Origini ad Oggi, vol.1*, Editrice La Scuola.

[3] Antiseri D., Reale G. (1997). *Il Pensiero Occidentale dalle Origini ad Oggi, vol.2*, Editrice La Scuola.

[4] Antiseri D., Reale G. (1998). *Il Pensiero Occidentale dalle Origini ad Oggi, vol.3*, Editrice La Scuola.

[5] Bilgiç T., Türkşen I.B. (1999), Measurement of membersgip function: theoretical and empirical work, *Fundamentals of Fuzzy Sets* (Dubois D. and Prade H. eds.), Kluvert Academic Publishers, 195-230.

[6] de Finetti B. (1974). *Theory of Probability*, volume 1, Waley, London

[7] Di Nola A., Gerla G. (1986). Nonstandard fuzzy sets, *Fuzzy sets and systems*, **18**, 173-181.

[8] Dowlatashahi F., Kohout L.J. (1988). Intentional possibilistic approach to dealing with incompleteness, vagueness and uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 277-295.

[9] Dubois D., Prade H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press.

[10] Dubois D., Prade H. (1988). *Possibility Theory*, Plenum Press, New York.

[11] Dubois D., Ostasiewicz W. and Prade H. (1999), Fuzzy Sets: History and Basic Notions, *Fundamentals of Fuzzy Sets* (Dubois D. and Prade H. eds.), Kluvert Academic Publishers, 21-124.

[12] Giles R. (1988). The concept of grade of membership, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 297-323

[13] Hàjek P., Shepherdson J. (2001). A note on the notion of truth in fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, **109**, 65-69.

[14] Hisdal E., (1988). Are grades of membership probabilities?, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 325-348.

[15] Hisdal E., (1988). The philosophical issues raised by fuzzy sets theory, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 349-356.

[16] Johnson-Laird P. N. (1988). *Modelli Mentali*, Il Mulino

[17] Klir G. J., Weirman M. J. (1998). *Uncertainty-Based Information*, Physica-Verlag, Heidelberg.

[18] Klir G. J. (1999). On fuzzy-set interpretation of possibility theory, *Fuzzy Sets and Systems*, **108**, 263-273.

[19] Kohout L.J. (1988). Theory of possibility: meta-axiomatics and semantics, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 357-367.

[20] Kosko B.(1995). *Il fuzzy-Pensiero*, Baldini e Castoldi, Milano.

[21] Lukasiewicz J. (1920). O logice trojvartosciowej, *Ruch Filozoficzny*, **5**, 170-171.

[22] Mancini V., Bandler W., (1988). A database theory of truth, *Fuzzy Sets and Systems*, **25**, 369-379.

[23] Nguyen H. T., Walker E. A. (1998). *A First Course in Fuzzy Logic, Second Edition*, Chapman & Hall.

[24] Sgarro A. (1996). Il vago e l'incerto nel ragionamento automatico, *Cultura e Scuola*, **137**, 293-302.

[25] Sgarro A. (1998). An Open-Frame Theory of Incomplete interval Probabilities, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **6**, 551-562.

[26] Sgarro A., Castellan P. (2000). Open-Frame Dempster Conditioning for Incomplete Interval Probabilities, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **8**, 285-293.

[27] Sgarro A. (2002). Possibilistic information theory: a coding theoretic approach, *Fuzzy Sets and Systems*, **132**, 11-32.

[28] Sgarro A. (2003). *Entropia ed informazione*, appunti per il corso di Informatica 2, Università di Trieste, disponibile presso http://www.dsm.units.it/∼sgarro/studenti.html.

[29] Sgarro A.(2003). An axiomatic derivation of the coding-theoretic possibilistic entropy, *in stampa per Fuzzy Sets and Systems.*

[30] Sgarro A. (2003). Unortodox probabilities: a dice-based approach, *in preparazione.*

[31] Sgarro A. (2003). Possibilities, utilities, distorsions, *in preparazione.*

[32] Smets P. (1995). Non Standard Probabilistic and non Probabilistic Representations of Uncertainty, *Technical Report I.R.I.D.I.A. Université Libre de Bruxelles*, **95-2**, 1-23

[33] Rucker R. (1991). *La Mente e l'Infinito*, Franco Muzzio Editore.

[34] Walley P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall.

[35] Wechler W. (1978). T*he concept of fuzziness in Automata and Language Theory*, Akademie-Verlag, Berlin.

[36] Zadeh L.A. (1968). Probability measures of fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, **23**, 421-427.

[37] Zadeh L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy sets and systems*, **1**, 3-28.