Prova scritta del concorso a n. 3 borse di studio per la Matematica
Collegio delle Scienze "Luciano Fonda"

Anno Accademico 2010/2011 Trieste, 6 settembre 2010

Tema 1

Notazioni e definizioni. Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, cioè l'insieme dei numeri $0, 1, 2, 3, \ldots$ e con $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali, rispettivamente.

1. Sei punti nel piano, denominati $A_1, \ldots, A_6$, soddisfano alle seguenti condizioni:
   - $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_1, A_4, A_6\}$ e $\{A_2, A_5, A_6\}$ sono allineati;
   - A_2, A_3, A_4, A_6 stanno su una stessa circonferenza con centro in A_5;
   - la circonferenza passante per A_3, A_4, A_5 ha centro in A_2.

   Sapendo che $\overline{A_5A_6} = l$, quanto vale $\overline{A_1A_6}$?

2. Siano $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Sia $g(x) = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x)$. Sapendo che $g(1) = 1, g(2) = 3$ e $g(3) = 4$, determinare i valori di a, b e c. Calcolare inoltre l'area della regione D del piano definita da: $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$.

3. Sia a un numero irrazionale. Provare che il numero $(a + 1)/(2a + 3)$ è irrazionale. Cosa si può dire del numero $(a + \sqrt{3})/(a - \sqrt{3})$?

4. Risolvere: $x < \sqrt{x^2 - 1} - 5$.

5. Trovare l'equazione della circonferenza tangente la retta $y = -2x - 12$ nel punto di ascissa $x = 1$ e tangente anche la retta $y = -2x + 4$.

6. Si calcoli

$$\frac{-\sqrt[3]{(-3)^3}}{\log_3 \sqrt[3]{25}} \cdot \frac{\log_3 \sqrt{125}}{\log_5 \sqrt{125}}$$

7. Si stabilisca, al variare del parametro reale α, il numero delle soluzioni reali distinte dell'equazione nell'incognita x

$$\frac{x^2 - 3x}{\alpha - x} = -2.$$

8. Sia $a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ una qualsiasi permutazione dei numeri $2, 3, \ldots, 2n$. Si provi che il numero $(a_2 + a_3) \cdot (a_4 + a_5) \cdots (a_{2n-2} + a_{2n-1}) \cdot a_{2n}$ è pari.