

Programma preliminare del corso di
SISTEMI DINAMICI
CdL in Matematica e CDL in Fisica

Dr. G. Tondo

Cenni storici alla Dinamica: Newton, Poincarè, Lorenz.

Equazioni differenziali ordinarie e sistemi dinamici. Spazio delle fasi e spazio delle fasi esteso.

Sistemi dinamici unidimensionali. Richiami sul teorema di esistenza, unicità e differenziabilità delle soluzioni rispetto ai dati iniziali.

1. **Sistemi autonomi.** Flusso. Soluzioni monotone e stazionarie. Orbite. Ritratto in fase. Punti di equilibrio: stabilità, instabilità e stabilità asintotica. Punti iperbolici. Teoremi di instabilità e stabilità asintotica. Modello di Malthus e modello logistico. Equivalenza topologica di sistemi dinamici. Biforcazione: nodo-sella, transcritica, a forcone, isteresi, catastrofe. Studio locale della biforcazione. Sistemi dinamici su S^1 . Soluzioni periodiche, calcolo del periodo. Sincronizzazione.
2. **Mappe scalari.** Equazioni alle differenze finite e sistemi dinamici discreti unidimensionali. Mappe scalari autonome: serie temporali, semiorbite, punti fissi, stabilità e stabilità asintotica. Diagramma a scala (co-web). Teorema di stabilità e sua interpretazione geometrica. Mappe monotone. Punti iperbolici e non iperbolici. Orbite periodiche. Biforcazione di punti fissi: tangente, transcritica, a forcone. Raddoppio del periodo. Mappa logistica: serie temporali e diagramma a scala. Biforcazione. Raddoppio del periodo in cascata. Finestre periodiche e ciclo di periodo 3. Caos. Teoremi di Sarkovskii e di Li-Yorke (senza dimostrazione).
3. **Sistemi non autonomi.** Soluzioni e spazio delle fasi esteso. Sistemi periodici e soluzioni. Stabilità e stabilità asintotica. Teorema di Massera. Mappa di Poincarè. Equivalenza con sistemi bidimensionali autonomi.

Sistemi dinamici multidimensionali. Sistemi di equazioni differenziali ordinarie di ordine n e sistemi dinamici multidimensionali. Campo vettoriale, moti, flusso, orbite. Equilibri.

1. **Sistemi non lineari.** Pendolo, Lotka-Volterra. Ritratto in fase del pendolo: curve di livello dell'energia, orbite chiuse, aperte, separatrici. Soluzioni periodiche e orbite chiuse. Punti e insiemi limite. Insiemi invarianti. Integrali primi locali e globali. Ritratto in fase del sistema di Lotka-Volterra. Effetto "pesca". Stabilità dell'equilibrio, stabilità asintotica, instabilità. Funzione di Liapunov. I teorema di Liapunov, II teorema di Liapunov (senza dimostrazione). Sistemi meccanici a vincoli olonomi, lisci, fissi, forze conservative e dissipative. Teorema di stabilità di Dirichlet-Lagrange. Stabilità e stabilità asintotica orbitale. Sezione e mappa di Poincarè di un'orbita chiusa. Ciclo limite. Esistenza di orbite periodiche: criterio necessario di Bendixson (o della divergenza). Insiemi limite in R^2 : teoremi di Poincaré-Bendixson (senza dimostrazione). Linearizzazione. Stabilità della linearizzazione e coniugazione topologica. Teorema di Hartman-Grobman (senza dimostrazione).
2. **Sistemi lineari.** Generalità sui sistemi dinamici lineari. Stabilità dell'origine: pozzi, sorgenti, selle, centri. Classificazione dei sistemi lineari piani: fuochi, nodi, centri, determinante e traccia della matrice. Caso meccanico e conservativo. Pendolo con resistenza lineare. Biforcazioni di sistemi piani: nodo-sella, forcone, verticale, di Hopf. Omocline e insiemi limite. Biforcazione di un'omoclina.

Testi consigliati

S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview (1994).

J. Hale, H. Koçac, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag (1991).

M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, Academic Press (2004).