

2 Ottobre 2007
Programma di Analisi 3
Anno Accademico 2007/2008

Prof. Enzo Mitidieri

Spazi metrici e spazi normati.

Spazi metrici: generalità sugli spazi metrici, Intorni aperti e chiusi, esempi importanti di metriche, metriche limitate, metriche equivalenti, esempi e controesempi. Spazi metrici importanti per le applicazioni. L'insieme \mathbb{R}^n come spazio metrico. Funzioni continue su spazi metrici, casi notevoli (funzioni vettoriali, etc...), funzioni localmente e globalmente Lipschitziane. Esempi concreti di funzioni continue e discontinue. Successioni in spazi metrici. Successioni di Cauchy. Esempi e controesempi. Spazi metrici completi. Esempi e controesempi. Completezza di $B(X, Y)$ = funzioni limitate da X in Y se Y è completo.

Completezza di $C(X, Y)$ (funzioni continue da X in Y) se Y è completo. La convergenza uniforme e quella puntuale. Esempi e controesempi. La non-completezza di C^1 con la norma uniforme. Caratterizzazione della continuità di una funzione mediante successioni. Teoremi di passaggi al limite sotto il segno di integrale (casi speciali).

Spazi vettoriali. Assiomi per gli spazi vettoriali. Esempi importanti di spazi vettoriali.

Lo spazio \mathbb{R}^n . Richiami sulle proprietà algebriche di \mathbb{R}^n . Base canonica e base duale, proiezioni. Rappresentazione di un operatore lineare. Spazi normati. Norme e norme equivalenti. Spazi di Banach e di Hilbert: La non equivalenza delle norme $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ e $\| \cdot \|_\infty$ su $C([a, b]; \mathbb{R})$. Operatori lineari fra spazi normati: caratterizzazione degli operatori lineari continui. Norma di un operatore. Esempi e controesempi. Ogni operatore lineare avente dominio uno spazio di dimensione finita è continuo. Esempi, controesempi ed esercizi. Lo spazio \mathbb{R}^n come spazio di Banach.

Norme notevoli su \mathbb{R}^n . Spazi con prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Spazio duale di uno spazio di Hilbert. La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. L'identità del parallelogramma. Funzionali lineari. Il teorema di Riesz (0). Lo spazio \mathbb{R}^n come spazio di Hilbert. Insiemi convessi. Caratterizzazione dell'elemento di minima distanza da un convesso chiuso di uno spazio di Hilbert. Proiezioni sui convessi chiusi. Casi notevoli.

Spazi metrici compatti.

Il concetto di compattezza. Utilità del concetto di compattezza. Uno spazio metrico compatto è completo. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti (0) Insiemi (spazi metrici) limitati e totalmente limitati. Esempi e controesempi. Caratterizzazione degli insiemi compatti di \mathbb{R}^n . Il teorema di Weierstrass e suoi corollari. Funzioni coercive (esempi ed esercizi). In \mathbb{R}^n tutte le norme sono equivalenti. Compattezza e uniforme continuità.

Il teorema del Dini sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni continue. Esempi e controesempi. Il teorema delle contrazioni. Esempi, controesempi ed esercizi riguardanti le contrazioni.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.

Il concetto di derivata direzionale. Esempi. Derivate parziali. Il differenziale di una funzione. Se f è differenziabile allora è derivabile lungo ogni direzione. Esempi di funzioni derivabili lungo ogni direzione in un punto ma non continue nel punto. Ogni funzione con derivate parziali continue in un punto è localmente Lipschitziana. La rappresentazione del differenziale di una funzione. Relazione fra il gradiente di una

funzione e il differenziale della stessa. Il teorema del differenziale totale. Il teorema del valor medio. L 'utilita' del teorema del valor medio. Piano tangente ad un grafico e sua relazione con la differenziabilita'. Derivate successive. Multiindice. Il teorema sull inversione dell'ordine di derivazione . Funzioni di classe C^k . La formula di Taylor per funzioni di piu' variabili.

Esempi di sviluppo di una funzione applicando la formula di Taylor. Il teorema di connessione. Aperti connessi, insiemi connessi, esempi e controesempi. Differenziale di funzioni vettoriali. Condizione sufficiente per la differenziabilita' di funzioni vettoriali. Differenziale di funzioni composte. Esempi . Massimi e minimi per funzioni di piu' variabili.

Il concetto di differenziale di ordine k , in particolare il differenziale secondo di una funzione. Rappresentazione del differenziale secondo. Funzioni convesse : propieta' analitiche e geometriche. Forme quadratiche. rappresentazione di forme quadratiche. Studio delle forme quadratiche. Forme definite positive, negative, indefinite. Caratterizzazione delle forme definite positive (negative). Massimi e minimi locali per funzioni di piu' variabili.

Caratterizzazione dei massimi (minimi) per funzioni di piu' variabili. Esempi e controesempi. Criteri per il calcolo dei massimi e minimi per funzioni di piu' variabili. Funzione omogenee e loro caratterizzazione via il teorema di Eulero. Esempi ed esercizi.

Equazioni differenziali ordinarie.

Che cos'e' una equazione differenziale? Che cos'e' un sistema di equazioni differenziali? Equazioni differenziali di ordine superiore. Equazioni autonome e non autonome. Il concetto di soluzione. Esempi notevoli di integrazione di equazioni differenziali del primo ordine. Il problema di Cauchy. Approssimazioni della soluzione. Intervallo massimale di esistenza. Condizioni sufficienti per l'esistenza del problema di Cauchy. Esempi. Prolungamento delle soluzioni. La nozione di prolungamento. Teorema di esistenza della soluzione massimale. Condizioni sufficienti per l'esistenza globale. Esempi di esplosione della soluzione in tempo finito. Esempi concreti di calcolo dell'intervallo massimale di esistenza. Il lemma di Gronwall e sue variazioni e applicazioni : in particolare il teorema di esistenza globale sotto ipotesi di sub-linearita' (e in ipotesi di Lipschitzianita'). Studi qualitativi. Sistemi ed equazioni lineari. Esistenza globale per equazioni o sistemi lineari. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. La matrice risolvente. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Equazioni lineari di ordine superiore ad uno e caratterizzazione dell'insieme di soluzioni. Esempi. Il caso speciale in cui i coefficienti sono costanti. Esempi.

Il teorema delle funzioni implicite. Il concetto di funzione implicita. Utilita' del teorema del Dini e suo significato. Il teorema del Dini in \mathbb{R}^2 . Esempi e controesempi. Il teorema del Dini e la formula di Taylor. Esempi relativi al calcolo delle funzioni implicite. Il teorema del Dini (caso vettoriale). Diffeomorfismi locali e globali. Il teorema del Dini ed il problema di Cauchy. Il teorema dell'invertibilita' locale. Esempi e controesempi. Massimi e minimi vincolati per funzioni di piu variabili. Vincoli espliciti e vincoli impliciti.

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange . Il concetto di spazio tangente. Applicazioni: ogni matrice reale simmetrica possiede solo autovalori reali, la disuguaglianza di Holder e Minkowski.

Serie di funzioni. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale ed uniforme. Teorema dei due limiti e corollari. Teoremi di integrazione e derivazione per successioni. Il criterio della convergenza totale. Serie di potenze: teorema di derivazione per le serie di potenze (caso reale). Teorema di Hadamard. Teorema di Abel . Sviluppi in serie di Taylor. Una condizione sufficiente per lo sviluppo in serie di Taylor. Sviluppi notevoli.

Testi di riferimento

Enrico Giusti - Analisi Matematica 2, seconda edizione, Bollati Boringhieri, 1989.

Enrico Giusti - Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, Volume II, Bollati Boringhieri, 1989.

W. H. Fleming - Functions of several variables, Addison- Wesley Publishing Company, 1965.

Carlo Domenico Pagani Sandro Salsa - Analisi Matematica, Volume II, Masson, 1992.

G. H. Hardy - A course in Pure Mathematics, X edition, Cambridge University Press, 1952.

Sergio Campanato - Lezioni di Analisi Matematica 2 a parte, seconda edizione, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini - Pisa, 1972.

Sergio Campanato - Esercizi e Complementi di Analisi Matematica 2 a parte, seconda edizione, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini - Pisa, 1972.