Programma di Analisi Matematica 3 e 4
Facolt`a di Scienze M.F.N.
Universit`a degli Studi di Trieste
Anno Accademico 2006-2007
Prof. ENZO MITIDIERI

ANALISI MATEMATICA 3

Spazi metrici e spazi normati. Spazi metrici: generalit`a sugli spazi metrici, Intorni aperti chiusi, esempi importanti di metriche, metriche limitate, metriche equivalenti, esempi e controesempi. Spazi metrici importanti per le applicazioni. L'insieme $\mathbf{R}^N$ come spazio metrico. Funzioni continue su spazi metrici,casi notevoli (funzioni vettoriali, etc...),
funzioni localmente e globalmente Lipschitziane. Esempi concreti di funzioni continue e discontinue.
Successioni in spazi metrici. Successioni di Cauchy. Esempi e controesempi. Spazi metrici completi. Esempi e controesempi.Completezza di B(X,Y)= funzioni limitate da X in Y se Y `e completo. Completezza di C(X,Y) ( funzioni continue da X in Y) se Y `e completo. La convergenza uniforme e quella puntuale. Esempi e controesempi. La non-completezza di $\mathbf{C}^1$ con $||.||_\infty$.
Caratterizzazione della continuit`a di una funzione mediante successioni. Teoremi di passaggi al limite sotto il segno di integrale (casi speciali). Spazi vettoriali. Assiomi per gli spazi vettoriali. Esempi importanti di spazi vettoriali. Lo spazio $\mathbf{R}^N$. Richiami sulle propriet`a algebriche di $\mathbf{R}^N$. Base canonica e base duale, proiezioni, etc.. Rappresentazione
di un operatore lineare fra $\mathbf{R}^N$ e $\mathbf{R}^M$. Spazi normati. Norme e norme equivalenti.
Spazi di Banach e di Hilbert: La non equivalenza delle norme $||.||_1$, $||.||_2$ e $||.||_\infty$ su C([a,b]; R). Operatori lineri fra spazi normati: caratterizzazione degli operatori lineari continui. Norma di un operatore. Esempi e controesempi. Ogni operatore lineare avente dominio uno spazio di dimensione finita `e continuo. Relazione fra la norma di un operatore
fra spazi di dimensione finita e la norma matriciale della matricie che lo rappresenta. Esempi, controesempi ed esercizi. Lo spazio $\mathbf{R}^N$ come spazio di Banach. Norme notevoli su $\mathbf{R}^N$.

Spazi con prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Spazio duale di uno spazio di Hilbert.
La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. L'identit`a del parallelogramma. Funzionali lineari.
Il teorema di Riesz (0). Lo spazio $\mathbf{R}^N$ come spazio di Hilbert. Insiemi convessi. Caratterizzazione dell'elemento di minima distanza da un convesso chiuso di uno spazio di
Hilbert. Proiezioni sui convessi chiusi. Casi notevoli.
Spazi metrici compatti. Il concetto di compattezza. L'utilit`a del concetto di compattezza. Uno spazio metrico compatto `e completo. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti (0). Insiemi (spazi metrici) limitati e totalmente limitati. Esempi e controesempi. Caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbf{R}^N$. Il teorema di Weierstrass e suoi corollari. Funzioni coercive (esempi ed esercizi). In $\mathbf{R}^N$ tutte le norme sono equivalenti. Compattezza
e uniforme continuit`a. Il teorema del Dini sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni. Esempi e controesempi. Il teorema delle contrazioni. Esempi, controesempi ed esercizi riguardanti le contrazioni.

Calcolo differenziale per funzioni di piu' variabili. Il concetto di derivata direzionale. Esempi. Derivate parziali. Il differenziale di una funzione. Se f `e differenziabile

allora `e derivabile lungo ogni direzione. Esempi di funzioni derivabili lungo ogni direzione
in un punto ma non continue nel punto. Ogni funzione con derivate parziali continue in un
punto `e localmente Lipschitziana. La rappresentazione del differenziale di una funzione. Relazione fra il gradiente di una funzione e il differenziale della stessa.

Il teorema del differenziale totale. Il teorema del valor medio. L'utilita' del teorema del valor medio. Piano tangente ad un grafico e sua relazione con la differenziabilit`a. Derivate
successive. Multiindice.
Il teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione . Funzioni di classe C^k. La formula di Taylor per funzioni di pi`u variabili. Esempi di sviluppo di una funzione applicando la formula di Taylor. Il teorema di connessione. Aperti connessi, insiemi connessi, esempi e controesempi. Differenziale di funzioni vettoriali. Condizione sufficiente per la differenziabilit`a di funzioni vettoriali. Differenziale di funzioni composte. Esempi . Massimi e minimi per funzioni di piu' variabili. Il concetto di differenziale di ordine k, in particolare il differenziale secondo di una funzione. Rappresentazione del differenziale secondo. Funzioni convesse : proprieta' analitiche e geometriche. Forme quadratiche. Rappresentazione di forme quadratiche. Studio delle forme quadratiche. Forme definite positive, negative, indefinite. Caratterizzazione delle forme definite positive (negative). Massimi e minimi locali per funzioni di piu' variabili. Caratterizzazione dei massimi (minimi) perfunzioni di pi`u variabili. Esempi e controesempi. Criteri per il calcolo dei massimi e minimi per funzioni di pi`u variabili. Funzione omogeneee e loro caratterizzazione via il teorema di Eulero. Esempi ed esercizi.
Serie di funzioni. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale ed uniforme. Teorema dei due limiti e corollari. Teoremi di integrazione e derivazione per successioni. Il criterio della convergenza totale. Serie di potenze: teorema di derivazione per le serie di potenze (caso reale). Teorema di Hadamard. Teorema di Abel . Sviluppi in serie di Taylor. Una condizione sufficiente per lo sviluppo in serie di Taylor. Sviluppi notevoli.

Il teorema delle funzioni implicite. Il concetto di funzione implicita. Utilit`a del teorema del Dini e suo significato. Il teorema del Dini in $\mathbf{R}^2$. Esempi e controesempi. Il teorema del Dini e la formula di Taylor. Esempi relativi al calcolo delle funzioni implicite.
Il teorema del Dini (caso vettoriale). Diffeomorfismi locali e globali. Il teorema del Dini ed il problema di Cauchy.
Il teorema dell'invertibilit`a locale. Esempi e controesempi. Massimi e minimi vincolati per funzioni di piu variabili. Vincoli espliciti e vincoli impliciti. Il teorema dei moltiplicatori
di Lagrange . Il concetto di spazio tangente. Applicazioni: ogni matrice reale simmetrica possiede solo autovalori reali, la disuguaglianza di Holder e Minkowski.

Testi consigliati

Enrico Giusti - Analisi Matematica 2, seconda edizione, Bollati Boringhieri, 1989.
Enrico Giusti - Esercizi e Complementi di Analisi Matematica,Volume II, Bollati Boringhieri,
1989.
Luigi Amerio - Analisi Infinitesimale, Volume II, Di Stefano , Genova, 1962.
W. H. Fleming - Functions ofsev eral variables, Addison- Wesley Publishing Company, 1965.
Carlo Domenico Pagani & Sandro Salsa - Analisi Matematica, Volume II, Masson, 1992.

G. H. Hardy - A course in Pure Mathematics, X edition, Cambridge University Press, 1952.
Burkill & Burkill - A second Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, 1978.
Sergio Campanato - Lezioni di Analisi Matematica 2*a* parte, seconda edizione, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini - Pisa, 1972.
Sergio Campanato - Esercizi e Complementi di Analisi Matematica 2*a* parte, seconda edizione, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini - Pisa, 1972.