Programma (definitivo) **del Corso di Geometria 3 – (Quadriche e curve piane) Anno accademico: 2005–2006 – Codice: SM074 – CFU 6 (Prof. Walter Spangher)**

Corso di Studi in Matematica (3 anni) – Facoltà di Scienze M.F.N. – Università degli Studi di Trieste

1) - Richiami di Algebra Lineare e di Geometria affine e proiettiva:

- (1.1) A-moduli; sequenze esatte e split; sezioni e retrazioni; cambiamenti di basi in moduli liberi; matrici di passaggio; matrici equivalenti; cambiamento di coordinate e matrice di passaggio; rango e caratteristica di una matrice (su un corpo) - teorema degli orlati;
- (1.2) richiami sugli spazi affini; coordinate affini- riferimenti e cambio di riferimenti;
- (1.3) richiami sugli spazi proiettivi; coordinate omogenee e cambiamenti di base; varietà lineari proiettive e loro intersezione; legame fra varietà lineari affini e proiettive; punti propri ed impropri; coordinate omogenee e non omogenee; processo di omogeneizzazione e disomogeneizzazione; spazio proiettivo duale $\mathbb{P}^{\vee}(V)$; bijezione canonica dell' insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{P}^{\vee}$; dualità negli spazi proiettivi; riferimenti duali e coordinate plückeriane di un iperpiano.

2) - Fattorialità ed anelli di polinomi:

- (2.1) Richiami sugli ideali e sugli A-moduli; insieme (pre)-ordinati verificanti la condizione a.c.c. e/o del massimale (i.e.: noetheriani); moduli noetheriani ed artiniani; noetherianità e finita generazione; esempi di anelli noetheriani; teorema della base di Hilbert; moduli di lunghezza finita; ideali primi e sistemi molt. chiusi; sistemi saturati e prodotti di (elementi) primi; domini UFD e loro caratterizzazione tramite principalità degli ideali primi "minimali".
- (2.2) Altre definizioni di UFD; a.c.c. sugli ideali principali e fattorialità con elementi irriducibili; esistenza del GCD (massimo comun divisore) in un UFD e relative proprietà; UFD e a.c.c. sui principali con esistenza del minimo comune multiplo; domini euclidei, gaussiani (GCD), bézoutiani, PID; relazioni fra i vari tipi di domini; cenni sugli interi algebrici e sull'origine del concetto di "ideale". – anelli delle frazioni e loro ideali; dimostrazione (sia secondo Nagata che secondo Gauss) del teorema di Gauss (A UFD $\Rightarrow A[X]$ UFD).
- (2.3.) Anelli di polinomi $A[X_1, \ldots, X_n]$; anelli graduati; graduazione per grado (totale) e per multigrado (monomi) - prime utilizzazioni; divisori di elementi omogenei in un dominio; – divisione euclidea (generalizzata) per anelli di polinomi in una indeterminata; radici di un polinomio e teorema di Ruffini; ordine di molteplicità di una radice; proprietà varie delle radici multiple (A dominio) legate alla fattorizzazione; domini d' integrità infiniti e principio d' identità dei polinomi.
- (2.4) Derivata di un polinomio $f \in A[X]$ in una indeterminata; derivate parziali $\partial f/\partial X_i$ per $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ e relative proprietà; derivate e caratterizzazione delle radici multiple; polinomi omogenei e loro caratterizzazioni: variabile aggiunta ed identità di Eulero; Formula di Taylor (su un corpo k con $\mathrm{car}(k) = 0$); richiami sui corpi algebricamente chiusi e chiusura algebrica di un corpo; fattorizzazione di un polinomio $f(X)$ (risp. $g(X_1, X_2)$ omogeneo) su un corpo algebricamente chiuso; sistemi di equazioni algebriche (compatibilità per sopracorpi; caso dei sistemi lineari).

3) - Risultante ed eliminazione:

- (3.1) Fattori comuni di grado positivo di due polinomi $f(X), g(X) \in A[X]$ dove A dominio UFD; lemma di Bézout; risultante di Sylvester; proprietà varie del risultante e risultante "improprio" ; eliminazione di variabili e proiezioni; eliminazione (fra 2 polinomi) e risultante; formule varie del risultante e $R(f \cdot g, h)$; eliminazioni "facili" ; discriminante di un polinomio (casi classici e non); risultante di due polinomi omogenei; risoluzione di un sistema di due equazioni algebriche.
- (3.2) eliminazione per sistemi di $n(\geqslant 2)$ equazioni algebriche e risultante alla Kronecker e sue variazioni; proprietà di estensione e risultanti; ideale eliminazione e confronti vari;

4) - Curve algebriche piane:

- (4.1) Curve algebriche piane (quale ideale principale); curve proiettive e corpi alg. chiusi; ordine; riducibilità; equazioni e cambio di coordinate; centro di simmetria di una curva piana affine; simmetria di una curva piana euclidea rispetto a una retta; intersezione finita di due curve prive di componenti comuni; proiezioni / eliminazioni permesse per intersezione curva Γ- retta r: definizione "intuitiva" di molteplicità d' intersezione $i(P;\Gamma\cdot r)$; significato geometrico dell' ordine.

- (4.2) Intersezione di due curve Γ,Δ, teorema di Bézout, posizioni permesse e buona definizione di $i(P;\Gamma\cdot\Delta)$; equivalenza di varie definizioni di $m(P;\Gamma)$ (molteplicità di un punto P su una curva Γ); cono tangente; ricerca dei punti singolari e dei relativi coni tangenti; analisi di alcuni punti doppi; $i(P;\Gamma\cdot\Delta)$ per P r-plo per Γ, s-plo per Δ con tangenti comuni o meno (solo enunciato); condizioni lineari varie e quadratiche; genere virtuale ed irriducibilità; aggiunte di ordine $(n-1),(n-2)$; aggiunte di ordine $(n-3)$ e caratterizzazione del genere; criteri di razionalità; curva Hessiana e flessi; curva Hessiana e punti singolari e terza formula di Plücker; analisi dei flessi di una cubica irriducibile.

- (4.3) inviluppi ed inviluppi aderenti; classe di un inviluppo; classe massimale; prima e seconda formula di Plücker (senza dimostrazione) e legame con la terza formula.

5) - Coniche e polarità:

- (5.1) Classificazione delle coniche proiettive, delle coniche affini e delle coniche euclidee; chiusura proiettiva delle coniche affini e punti impropri; discriminante e riducibilità; inviluppi conici; inviluppo aderente.

- (5.2) Sistemi lineari di coniche; fasci riducibili di coniche; caratterizzazioni varie dei 5 tipi di fasci irriducibili; il fascio-schiera di coniche bitangenti; relazione di coniugio e polarità; polarità per coniche riducibili e per coniche inviluppo; triangoli (trilateri) autopolari; costruzioni grafiche (con la sola riga); centro e diametri; assi e asintoti; fuochi di una conica reale irriducibile; condizioni lineari e quadratiche; equazioni asintotiche, focali, assiali, ... ; utilizzo (ottimale) di sistemi lineari di coniche (luogo/inviluppo) per un mix di condizioni lineari e quadratiche.

Testi seguiti e letture consigliate:

1- Comessatti A., *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Cedam, Padova (1946-62).
2- Cox D., Little J., O'Shea D., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer, New York-Berlin (1991).
3- Kaplansky I., *Commutative Rings*, University of Chicago Press, Chicago (1970).
(soltanto - e parzialmente - i capitoli 1.1; 1.4; 1.6; 2.1;)
4- Malliavin M.P., *Algèbre Commutative (applications en géométrie et théorie des nombres)*, Masson, Paris (1985).
(utilizzato parzialmente, nei capitoli 1, 2, 3)
5- Predonzan A., *Lezioni di geometria -Vol. II - Curve piane algebriche*, Tipografia Moderna Ed., Trieste (1972).
6- Seidenberg A., *Elements of the theory of algebraic curves*, Addison-Wesley P.C., Reading Massachussets (1968).
(soltanto fino al capitolo 10).

Modalità d'esame: L'esame è composto di una prova scritta e di una prova orale (successiva). La prova scritta consiste di 3/4 esercizi relativi al programma svolto.(durata della prova: ore 2)

Ricevimento studenti (fino al 30.09.2006): Lunedì ore: 15.00 – 17.00 nello studio n. 232 al II piano del Dipartimento di Scienze Matematiche; oppure su appuntamento da concordare al n. 040-558-2655 o via e-mail: spangher@units.it (preferibilmente via e-mail).