Programma (definitivo-particolareggiato) del corso di
Istituzioni di Geometria Superiore 2 - (Cod. SM912) - a.a. 2008-09 - CFU 6
Laurea Magistrale in Matematica (2 anni) - Università di Trieste
docente: Walter Spangher

(1) **Complementi di topologia**

- **(1.1) Spazi irriducibili.-** Connessione ed irriducibilità; parti irriducibili e loro chiusura; ricoprimenti di aperti irriducibili concatenati; immagini di irriducibili; applicazioni aperte con fibre irriducibili; componenti irriducibili; ricoprimenti finiti di chiusi irriducibili; legami fra componenti irriducibili di Y e della chiusura di Y; chiusi irriducibili di una parte aperta U e chiusi irriducibili della chiusura di U.
  Punti generici, specializzazioni e generalizzazioni; richiami sugli assiomi di separazione, spazi (T_0) e spazi sobri. Esempi.
- **(1.2) Spazi noetheriani.-** Spazi noetheriani, loro sottospazi, loro ricoprimenti finiti; noetherianità e quasi-compattezza degli aperti; finitezza delle componenti irriducibili di un chiuso. Esempi. Dimensione combinatorica.
- **Riferimenti:** [Bo(1-2), Ch.2, §4, 1-2], [Di74, T(1-14)].

(2) **Varietà algebriche affini**

- **(2.1) Richiami (e non) di algebra commutativa.-** Richiami sulle estensioni di corpi. Ideali massimali di $k[x_1, \ldots, x_n]$, ideali massimali k-razionali e non, con richiami vari sul Nullstellensatz. Teoremi di Cohen-Seidenberg (lying-over, going-up, inconfrontabilità) e lemma di normalizzazione. Anelli di Jacobson-Hilbert, loro algebre f.g. e comportamento sugli ideali massimali. Richiami su moduli piatti e fedelmente piatti; algebre fedelmente piatte e comportamento sugli ideali massimali; omomorfismi locali e piattezza; finita generazione, presentazione finita ed estensione degli scalari.
- **Riferimenti:** [Bo(5-6), Ch.V, §3], [Ma86, §5], [Ka74, §1.6].
- **(2.2) Kronecker e la visione insiemistica.-** La coppia di corpi $k \subseteq K$, i polinomi di $k[x_1, \ldots, x_n]$ e lo spazio affine $\mathbb{A}_n(K)$; le mappe $\mathcal{J}_k$ e V_K e loro proprietà; (k/K) varietà; k-topologia di Zariski di $\mathbb{A}_n(K)$, k-aperti speciali $D(f)$, basi di topologia, chiusura, noetherianità e conseguenze; k-irriducibiltà di H ed ideale $\mathcal{J}_k(H)$ primo; esempi con K finito ed infinito; interpretazione di $\mathcal{J}_k$ con lo spettro massimale K-razionale (Spmraz) di $K[x_1, \ldots, x_n]$; il caso $k \subseteq \overline{k} \subseteq K$ ($\overline{k}$ chiusura algebrica di k) e Nullstellensatz; interpretazione moderna della tecnica di Rabinowitch; considerazioni critiche sul cambio del corpo k e del corpo K; esempi e controesempi; esistenza di punti generici e domini universali; non k-sobrietà di $\mathbb{A}_n(K)$.
- **(2.3) Funzioni regolari e morfismi.-** Funzioni k-regolari di una (k/K)-varietà (affine) V; anello delle funzioni regolari $\mathcal{O}(V)$ = anello delle coordinate $k[V]$ di V.
  Le bijezioni $V \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[V], K)$ e $V \leftrightarrow \mathrm{Spmraz}(K[\underline{x}]/\mathcal{J}_k(V) \cdot K[\underline{x}])$. Morfismi di (k/K)-varietà, equivalenza di definizioni; comorfismo associato; la categoria delle (k/K)-varietà (affini) come duale della categoria delle k-algebre f.g. ridotte relative a varietà; caso del Nullstellensatz ($k \subseteq \overline{k} \subseteq K$). Esempi di morfismi: proiezioni, morfismo grafo, isomorfismi, morfismo di Frobenius, morfismi dominanti, ecc..
- **(2.4) Costruzioni di varietà affini.-** Prodotto di varietà (prodotto diretto categoriale); richiami categoriali di prodotto diretto, somma diretta, limiti proiettivi ed induttivi (inversi, diretti); prodotto tensoriale di algebre commutative (somma diretta); anello delle coordinate di un prodotto di varietà; prodotto di varietà irriducibili, caso generale, $k = K$, K alg.chiuso. Topologia prodotto di topologie di Zariski e topologia di Zariski del prodotto: confronto. Gli aperti speciali $D(f)$ come varietà affini, loro anello delle coordinate, comportamento con i morfismi.

L'isomorfismo fra $V \cap W$ $(V, W \subseteq \mathbb{A}_n(K))$ e $V \times W \cap \Delta$, riduzione dell'intersezione ad intersezioni con varietà lineari; esempi.
Ideali radicali e non, insoddisfazione della visione insiemistica; nozione "intuitiva" di (k/K)-schema (con o senza immersione); cenni storici sull' utilizzo "alternativo" dei cicli; richiami sulla decomposizione primaria, e cenni su esponente, lunghezza, molteplicità (alla Samuel) di un ideale primario.

- **Riferimenti:** [Ku85, Ch.I, §1, 2, 3]; caso K alg.chiuso, $k = K$: [Sa67, Ch.I,§1], [Di74, §1], [Sh74, Ch.I, §1, 2, 3]; per la dualità algebre/varietà, cfr. anche [CLO97, Ch.5, §4].
- **(2.5) Operazioni su ideali, computabilità, dizionario algebra/geometria.-** Cenni su termordering e basi di Gröbner; ideali eliminazione (di variabili) e computazione; storia-diatriba Weil-Abhyankar; intersezione di ideali, unione di k-schemi, computazione; somma di ideali, intersezione di schemi; membership per radicale di un ideale; problemi relativi alla computazione del radicale e della decomposizione primaria (prima parte); ideale eliminazione e chiusura della proiezione; interpretazioni geometriche degli ideali quozienti $I : J$ e degli ideali saturati $I : J^\infty$, e loro computazione (caso generale e con ideali radicali).
- **Riferimenti:** [CLO97, Ch.4, $\S1 - 8$].

(3) **Spettri e loro utilizzo**

- **(3.1)** Spettro primo, topologia di Zariski, gli aperti speciali X_f, le mappe $\mathcal{J}$ e V e loro proprietà; quasi-compattezza degli aperti speciali; interpretazione della noetherianità dello spettro; parti irriducibili; ideali primi minimali e componenti irriducibili; comorfismo associato (continuità, iniezioni, dominanze,ecc.); cenni sulla connessione dello spettro (dominio, anello locale; solo enunciato della caratterizzazione della connessione). Spettri particolari: chiusi, aperti speciali, fibre. Sobrietà dello spettro; spettro massimale e di Jacobson; generazioni su una parte dello spettro e problemi relativi; proprietà puntuali e locali, questione delle "equazioni" di un chiuso dello spettro. Spettro come parte topologico-insiemistica del k-schema, confronto varietà / schema.
- **(3.2)** Esplorazioni sullo spettro: gli ideali di Fitting di un modulo M di presentazione finita, proprietà e computabilità; le "equazioni" di un chiuso; la ricerca tramite chiusi di $\mu(M; \mathfrak{p})$ generazione minimale di M nel primo $\mathfrak{p}$; equazioni del supporto; teorema di Forster-Swan (senza dimostrazione); richiami sugli A-moduli (A PID), fattori invarianti e divisori elementari .
- **(3.3)**Richiami sull' assassino-associato $\mathrm{Ass}_A(M)$, relazioni con il supporto $\mathrm{Supp}_A(M)$ e con la filtrazione di Bourbaki; decomposizione primaria di un sottomodulo. Stratificazione tramite gli $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ dell' assassino di M (nel solo caso: A di dimensione globale finita; cenni sugli anelli di Gorenstein); richiami sulla dimensione proiettiva, sugli anelli locali regolari e sulla formula di Auslander-Buchsbaum. Cenni sulla computabilità della decomposizione primaria (II parte). Interpretazione di alcuni teoremi classici sullo spettro (ad es. teor. di McCoy - "avoiding prime ideals"). Alcune rappresentazioni particolari (ad es. primbasis).
- **Riferimenti:**[Bo(1-2), Ch.2, § 4, n.3-4]; [Ku85, Ch.I, § 4;Ch.III,§ 1]; per thm. Forster-Swan [Ma86, § 5]; per la stratificazione di $\mathrm{Ass}_A(M)$ [St90, § 6]; per gli ideali di Fitting [Ku86, App.D - pp. 331-341] .

(4) **Anelli e moduli graduati**

- **(4.1) Graduazioni generali.-** Richiami sui gruppi abeliani; gruppi ordinati e gruppi privi di torsione; anelli graduati, unità; moduli graduati, sottomoduli omogenei, quozienti, omomorfismi; categoria abeliana dei moduli graduati; shift di graduazione. Morfismi di grado δ, shift e loro somma (diretta) h-$\mathrm{Hom}_R(M, N)$; l' isomorfismo con

$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ nel caso M f.g.; moduli h-liberi, h-proiettivi; graduazione del prodotto tensoriale di due moduli graduati, isomorfismi; cenni sugli h-piatti e h-iniettivi.
La categoria dei moduli graduati ha sufficienti oggetti proiettivi ed iniettivi; graduazione dei funtori derivati: h-$\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ (caso particolare: R noetheriano, M f.g.), e h-$\mathrm{Tor}^R_i(M,N)$; richiami sulla cohomologia "locale" e confronto (invariato) caso graduato/caso generale.

- **(4.2) Graduazioni su gruppi ordinati e su $\mathbb{Z}$.-** Ideali omogenei ed operazioni, ideali h-primi e h-primari. Ideale I^*, modulo M^* e comportamento con le operazioni; h-corpi ($\mathbb{Z}$-graduazioni), cenni sugli h-corpi per $\mathbb{Z}^n$-graduazioni; radicale di Jacobson omogeneo e Nakayama omogeneo; anelli graduati positivamente, anelli omogenei; anelli h-noetheriani e loro caratterizzazioni ($\mathbb{Z}$-graduazioni); decomposizione primaria per ideali omogenei; cenni su $\mathrm{Ass}_R(M)$ (M graduato).
Localizzazioni graduate, geometriche e aritmetiche - confronti e relazioni; anelli h-locali (speciali e non); h-ht (altezza) e h-dim (dimensione), caso dei graduati positivi. Spettro omogeneo e $\mathrm{Proj}(R)$.
- **(4.3) Moduli graduati su anelli h-locali.-** Anelli h-locali, proprietà ed esempi; generazioni minimali omogenee e risoluzioni graduate libere minimali; la localizzazione $M_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m}$ ideale h-massimale dell'anello h-locale); risoluzioni libere minimali (anello locale); teor. di sizigie di Hilbert ed anelli locali regoalri; lemma di Schanuel; FFR e caratteristica di Eulero, (casi di moduli fedeli e non); i numeri di Betti omogenei β_{ij} nel caso h-locale speciale.
- **(4.4) Complementi su anelli graduati positivi.-** Disomogneizzazione rispetto ad un elemento (non nilpotente) di grado 1; proprietà ed isomorfismi; disomogeneizzazione ed omogeneizzazione di ideali (I parte-caso generale); code di ideali omogenei, equivalenza; ideali primi essenziali e Proj; ricostruzione di ideali primi (primari) dalle code; ricostruzione di ideali primi essenziali ed isomorfismi locali geometrici.
- **Riferimenti:** [BrHe93, Ch.I, §1.5]; [Lo82]; [Ma94];
per ideali primi essenziali, ricostruzione dalle code: [Bo(3-4), Ch. III, §1];
cfr. [DaKu83], per localizzazioni graduate e geometriche.

(5) **Varietà proiettive**

- **(5.1)** La coppia di corpi $k \subseteq K$, i polinomi omogenei di $k[x_0,\ldots,x_n]$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(K)$; le mappe Jh_k e VP_K e loro proprietà; (k/K) varietà proiettive, k-topologia di Zariski di $\mathbb{P}_n(K)$; k-irriducibilità, ecc.; Caso K infinito: cono affine associato e proprietà; Caso $k \subseteq \overline{k} \subseteq K$ e Nullstellensatz proiettivo; topologia quoziente; code di ideali omogenei, ideali equivalenti, saturazione: proprietà e computazione del saturato; classi di ideali equivalenti e nozione di k-schema proiettivo; Proj e parte topologica delllo schema; generazioni schematiche e problemi relativi.
- **(5.2)**Operazioni di omogeneizzazione e disomogeneizzazione di ideali e relative proprietà; topologia indotta; chiusura proiettiva di una (k/K) varietà affine, di un k-schema affine; basi di Macaulay, loro varie caratterizzazioni e relative tecniche computazionali. Varietà/schemi proiettivi ed aperti speciali affini e (altro) Nullstellensatz. Cenni su incollamenti di spazi topologici e di varietà affini.
- **(5.3)** Prodotto di spazi proiettivi, ideali biomogenei e varietà biproiettive; prodotto di chiusure proiettive e chiusura biproiettiva; varietà di Segre, sue equazioni e proprietà; passaggio da ideali biomogenei ad ideali omogenei della varietà di Segre e viceversa; diagonale Δ, chiuso di $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$.
- **(5.4) Eliminazione proiettiva.-** k-chiusi C di $K^m \times \mathbb{P}_n(K)$ e loro ideali; ideale di eliminazione proiettiva (Trägheitsformen di Hurwitz) come ideale della chiusura della proiezione $pr_1(C)$ e sua computazione; ideale di eliminazione proiettiva come

intersezione degli ideali di proiezione affine delle disomogeneizzazioni di C; ideale eliminazione affine ed ideale di eliminazione proiettiva dell' omogeneizzato (parziale); situazione di Nullstellensatz ($k \subseteq \overline{k} \subseteq K$) e teorema di "estensione-eliminazione" proiettiva (prova alla Shafarevich); K alg.chiuso ed interpretazione sulla chiusura della proiezione affine. Varietà complete; varietà proiettive come varietà complete; cenni sull' applicazione agli schemi del teor. di estensione proiettiva (cf. Grothendieck by Cartier-Tate) e problemi per eventuali analogie sullo spettro spuntato.

- **(5.5) Conseguenze/applicazioni.-** Funzioni regolari su una varietà proiettiva; morfismi (cenni senza alcune prove); ipersuperfici proiettive riducibili di dato ordine; computazione "veloce" dell' ideale associato all' immagine di un morfismo fra spazi proiettivi.
- **Riferimenti:**– per (5.1) cfr.[Ku85, Ch.I,§5]; caso K alg.chiuso, $k = K$: [Sa67, Ch.I,§2], [Di74, §3], [Sh74, Ch.I, §4];
  per (5.2) cfr.[ZaSa2, Ch.VII, §2, §5,](con attenzione ai grossolani errori !!), [CLO97, Ch. VIII, §1 − 4];
  per i richiami: [Ka74, Ma86, BrHe93]; per (5.3) cfr. [Sa67, Ch.I,§4.2 − 4.3], [Sh74, Ch.I,§5.1];
  per (5.4) cfr. [CLO97, Ch.8, §5], [Sh74, Ch.I,§5.2].

(6) **Dimensione**

- **(7.1)**Richiami su dimensione combinatorica, di Krull e conseguenze dimensionali del lemma di normalizzazione; richiami sulla funzione di Hilbert, serie di Poincaré, dimensione di Hilbert, di Krull e di Chevalley (s.o.p.); richiami su Hauptidealsatz e dintorni (teor. di Krull-Akizuki, ecc.).
  Ideali I di $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, e computazioni varie di $\dim(I)$ via funzione di Hilbert; $\dim(I) = \max\{r | I \cap k[x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}] = (0)$, ovvero dimensione alla Gröbner via variabili alg. indipendenti, e semplificazioni per I primo; $\dim({}^hI) = \dim(I) + 1$.
- **(7.2)** Dimensione combinatorica per varietà; dimensione del prodotto di varietà; interpretazioni geometriche dell' Hauptidealsatz e dintorni; proprietà UFD ed interpretazione geometrica (affine e proiettiva); dimensione dell' intersezione di due varietà irriducibili, (in particolare il caso proiettivo); componenti proprie ed eccedentarie; intersezione di più varietà, (esempi). Cenni (senza dimostrazioni) intorno al Teorema sulla dimensione delle fibre.
- **Riferimenti:**– per (7.1) cfr. [CLO97, Ch. 9.1–9.5], [Ma86, Ch. 13 (parziale)];
  per (7.2) cfr. [Di74, §4.2-4.3], [Sa67, Ch.I, §5],[Sh74, Ch.I - §5.3, §6.3].

Bibliografia

[Bo(1-2)] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Ch. 1,2*, Hermann, Paris, 1961.
[Bo(3-4)] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Ch. 3,4*, Hermann, Paris, 1961.
[Bo(5-6)] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Ch. 5,6*, Hermann, Paris, 1964.
[BrHe93] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press, 1993.
[CLO97] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[DaKu83] U. Daepp, W.-E. Kuan, *A note on the localization of a graded ring*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. **11** (1983), 337-341.
[Di74] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique 2*, Presses Universitaires de France, Vendôme, 1974.
[Ka74] I. Kaplansky, *Commutative rings*, (II ed.), Univ.Chicago Press, Chicago, 1974.
[Ku85] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäser, Boston, 1985.
[Ku86] E. Kunz, *Kähler dfferentials*, Friedr.Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.

[Lo82] A. Lorenzini, *Graded rings*, in "The curves seminar at Queen's-II", Exp. **D**, Queen's Papers **61**,1982, 41 pp.

[Ma86] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, 1986.

[Ma94] H. Matsumura, *Graded rings and modules*, in "Commutative ring theory"- (Ed.: Cahen-Costa-Fontana-Kabbaj), LNPAM **153**, Marcel Dekker, (1994), 193-203.

[Sa67] P. Samuel, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique* - (II édition), Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Sh74] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[St90] M. Stillman, *Methods for computing in algebraic geometry and commutative algebra*, Acta Appl. Math. **21**, (1990), 77-103.

[ZaSa2] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra vol.2*, D. vanNostrand, Princeton, 1960.