COGNOME .... NOME ....

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA .... MATRICOLA ....

Secondo test di
GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

17 dicembre 2007

DEFINIZIONI

(a) Spazio vettoriale
(b) Sottospazio vettoriale
(c) Base e dimensione di uno spazio vettoriale
(d) Rango di una matrice
(e) Matrice ridotta per righe
(f) Spazio delle soluzioni di un sistema lineare
(g) Applicazione lineare
(h) Nucleo e immagine di un'applicazione lineare
(i) Matrice di cambiamento base
(l) Somma diretta di sottospazi vettoriali
(m) Matrici simili
(n) Autovettori e autovalori
(o) Autospazi
(p) Polinomio caratteristico di una matrice
(q) Giacitura di una retta e di un piano
(r) Rette parallele
(s) Piani paralleli
(t) Retta e piano paralleli
(u) Fascio (proprio e improprio) di rette nel piano
(v) Fascio (proprio e improprio) di piani

N.B. u-v: solo corsi Brundu-Sacchiero

ENUNCIATI

(1) Criterio di sottospazio vettoriale
(2) Metodo per il calcolo del nucleo di un'applicazione lineare
(3) Metodo per il calcolo dell'immagine di un'applicazione lineare
(4) Teorema di Grassmann
(5) Criterio di iniettività di un'applicazione lineare
(6) Criterio di suriettività di un'applicazione lineare
(7) Criterio di isomorfismo di un'applic. lineare
(8) Metodo di risoluzione dei sistemi lineari
(9) Teorema di Rouché-Capelli
(10) Teorema su matrici associate ad una applic. lineare e cambi di base (con diagramma)
(11) Metodo per determinare se una matrice è diagonalizzabile
(12) Teorema di caratterizzazione degli endomorfismi semplici
(13) Equazione della retta per due punti
(14) Equazione del piano per tre punti
(15) Formula della distanza punto-retta (nel piano)
(16) Formula della distanza punto-piano

DIMOSTRAZIONI

(A) Sia V un K-spazio vettoriale e $W \subseteq V$. Allora:
W è un sottospazio vettoriale di $V \quad \Leftrightarrow \quad W$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare.
(B) Siano W_1 e W_2 due sottospazi di un K-spazio vettoriale V e si denoti con $W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2;\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$. Allora $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $W_1 \cup W_2$.
(C) Sia V un K-spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V.
(D) Ogni insieme finito di generatori di uno spazio vettoriale contiene un sistema libero di generatori.
(E) Un insieme di vettori $I = \{v_1, \dots, v_n\}$ è libero se e solo se ogni elemento di $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei v_i.
(F) Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare; allora $f(a_1v_1 + \cdots + a_pv_p) = a_1f(v_1) + \cdots + a_pf(v_p)$, per ogni $v_1, \dots, v_p \in V$, per ogni $a_1, \dots, a_p \in K$.
(G) Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}\ (f)$ sono sottospazi di V e di W, rispett.
(H) Siano V e W due K-spazi vettoriali della stessa dimensione. Allora V e W sono isomorfi.
(I) Due matrici $A, B \in K^{n,n}$ sono simili se e solo se esiste una matrice $P \in GL(n)$ tale che $P^{-1}AP = B$.
(L) Sia V un K-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; se $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ sono autovalori distinti e $0_V \neq v_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2$, allora $\{v_1, v_2\}$ è libero.
(M) Dati due punti, esiste ed è unica la retta passante per i due punti stessi.
(N) Intersezione di due rette nel piano: casi possibili
(O) Intersezione di due rette nello spazio: casi possibili
(P) Intersezione di due piani nello spazio: casi possibili.

N.B. I-L: solo corso Landi