

COGNOME ..... NOME .....  
CORSO DI LAUREA .....

Prova scritta di GEOMETRIA  
23 gennaio 2007

I. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata alla matrice

$$M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dove  $\mathcal{E}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Determinare:

- 1) una base di  $\ker(f)$ ;
- 2) una base di  $\text{Im}(f)$ ;
- 3) gli autovalori di  $f$ , con le rispettive molteplicità;
- 4) una base per ogni autospazio di  $f$ ;
- 5) che ogni autospazio  $V_\lambda$  (con  $\lambda \neq 0$ ) è contenuto in  $\text{Im}(f)$  (verifica nello svolgimento);
- 6) con il metodo di riduzione delle matrici, se  $\mathcal{B} = ((2, 1, 0), (1, 2, 1), (1, -1, 2))$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ ;
- 7) la matrice  $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ .

II. Nello spazio affine euclideo  $E^3$  siano dati il piano, la retta e il vettore:

$$\pi : x + y - 2z + 4 = 0, \quad r : (x, y, z) = t(1, 1, -1), \quad v = (1, 1, 1).$$

Determinare:

- 8) l'equazione cartesiana del piano  $\pi'$ , parallelo a  $\pi$  e passante per l'origine;
- 9) i punti  $A \in \pi$  e  $A' \in \pi'$  ottenuti intersecando i due piani con la retta  $r$ ;
- 10) la distanza  $d(A, A')$ ;
- 11) che  $v$  appartiene alla giacitura dei piani  $\pi$  e  $\pi'$ .

Si consideri ora il rombo avente  $A$  e  $A'$  come vertici e due lati paralleli al vettore  $v$ . Determinare quindi:

- 12) le equazioni vettoriali delle rette  $s \subset \pi$  e  $s' \subset \pi'$  contenenti due lati del rombo;
- 13) gli ulteriori due vertici  $B$  e  $B'$  del rombo;
- 14) l'area del rombo  $A, A', B', B$ .

RISPOSTE

---

1) \_\_\_\_\_ 2) \_\_\_\_\_

---

3) \_\_\_\_\_ 4) \_\_\_\_\_

---

5) (nello svolgimento)      6) (nello svolgimento)      7) \_\_\_\_\_

---

8) \_\_\_\_\_ 9) \_\_\_\_\_ 10) \_\_\_\_\_ 11) (nello svolgimento)

---

12) \_\_\_\_\_ 13) \_\_\_\_\_ 14) \_\_\_\_\_

---