

COGNOME .....NOME .....  
CORSO DI LAUREA .....

Prova scritta di  
GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE ED ELEM. GEOM.  
20 giugno 2005

---

Esercizio A

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita da:

$$f((x, y, z)) = (x + 2y - z, x + y + z).$$

Sia  $\mathcal{E}_3$  (risp.  $\mathcal{E}_2$ ) la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  (risp.  $\mathbb{R}^2$ ). Siano inoltre  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ , dove  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1)$ , e  $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ , dove  $w_1 = (1, 2)$ ,  $w_2 = (2, 1)$  altre due basi di  $\mathbb{R}^3$  e di  $\mathbb{R}^2$ , rispettivamente.

Determinare:

- 1) la matrice  $M_f^{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2}$ ;
  - 2) se  $f$  è iniettiva, suriettiva, isomorfismo;
  - 3) una base di  $\ker(f)$  e una base di  $\text{Im}(f)$ ;
  - 4) la matrice  $M_f^{\mathcal{B}, \mathcal{E}_2}$ ;
  - 5) la matrice  $M_f^{\mathcal{E}_3, \mathcal{C}}$ ;
  - 6)  $f^{-1}((1, 1))$ .
- 

Esercizio B

Nello spazio affine euclideo  $E^3$  si considerino i piani  $\pi_1, \pi_2$  ed i punti  $A_1 \in \pi_1$ ,  $A_2 \in \pi_2$  dove:

$$\pi_1 : x - y = 0, \quad \pi_2 : z = 0, \quad A_1 = (0, 0, 3), \quad A_2 = (2, -2, 0).$$

Determinare:

- 1) l'equazione cartesiana della retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ;
- 2) l'equazione parametrica della retta  $r$ ;
- 3) se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono ortogonali;
- 4) l'equazione cartesiana della retta  $s_1$  contenuta in  $\pi_1$ , passante per  $A_1$  ed ortogonale a  $r$ ;
- 5) l'equazione cartesiana della retta  $s_2$  contenuta in  $\pi_2$ , passante per  $A_2$  ed ortogonale a  $r$ ;
- 6) se  $s_1$  e  $s_2$  sono ortogonali e incidenti e il loro punto di intersezione  $P$ ;
- 7) l'area del triangolo rettangolo di vertici  $A_1, A_2, P$ .