COGNOME ....NOME ....

CORSO DI LAUREA ....

Prova scritta di
GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE ED ELEM. GEOM.

10 gennaio 2005

Esercizio A

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

dove $v_1 = (-1, 1, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 2, 2), v_3 = (-1, 1, 0, 2), v_4 = (1, 1, -1, 0), v_5 = (0, 2, 0, 2)$.
Posto $I = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, determinare una base $\mathcal{B}$ di W tale che $\mathcal{B} \subseteq I$ e sia ottenuta col metodo degli scarti successivi tramite la riduzione di matrici (INDICARE LE OPERAZIONI DI RIDUZIONE).

Esercizio B

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $f(x, y, z) = (-y+z, -2x+y, -2x+2y-z)$. Determinare:
1) la matrice $M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2) una base di $\ker(f)$;
3) una base di $\mathrm{Im}(f)$.
4) la controimmagine del vettore $v = (0, 1, 1)$;
5) la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbb{R}^3$ data da $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

Esercizio C - Geometria

Nello spazio affine euclideo E^3 siano dati il punto $P = (1, -1, 1)$ e il fascio di piani

$$\mathcal{F}_r : \lambda(x - z + 3) + \mu(y + z - 3) = 0.$$

Determinare:
1) l'equazione parametrica della retta r sostegno del fascio $\mathcal{F}_r$;
2) il piano $\pi_1 \in \mathcal{F}_r$ passante per P;
3) l'equazione parametrica della retta s parallela ad r e passante per P, verificando che $s \subset \pi_1$;
4) il piano $\sigma_1 \in \mathcal{F}_r$ ortogonale a π_1;
5) un piano π_2, parallelo a π_1 e tale che $d(\pi_2, \pi_1) = d(r, s)$;
6) le equazioni dei piani, oltre π_1, π_2, σ_1, contenenti le facce del cubo avente P come vertice e 2 degli spigoli sulle rette r ed s.

Esercizio C - Algebra lineare ed elementi di Geometria

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $f(x, y, z) = (-y+z, -2x+y, -2x+2y-z)$. Determinare:
1) gli autovalori di f e relativa molteplicità;
2) gli autospazi di f e relative basi;
3) se f è semplice (motivare all'interno).
Poste r, s, t le rette vettoriali corrispondenti agli autospazi di f, determinare:
4) se tali rette sono a due a due ortogonali;
5) le equazione parametriche dei tre piani contenenti le facce della piramide di vertice l'origine e spigoli contenuti nelle tre rette r, s, t;
6) le equazioni cartesiane dei tre piani determinati al punto 5.