COGNOME ....NOME ....

CORSO DI LAUREA ....

Prova scritta di
GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE ED ELEM. GEOM.

6 giugno 2005

Esercizio A

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f((x, y)) = (x + y, x - y, 2x - 3y).$$

Sia $\mathcal{E}_2$ (risp. $\mathcal{E}_3$) la base canonica di $\mathbb{R}^2$ (risp. $\mathbb{R}^3$). Siano inoltre $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1)$, e $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$, dove $w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (1, 0, 1), w_3 = (0, 1, 1)$ altre due basi di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.

Determinare:
1) la matrice $M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3}$;
2) se f è iniettiva, suriettiva, isomorfismo;
3) una base di $\ker(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$;
4) la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}$;
5) la matrice $M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{C}}$;
6) $f(v)$ espresso in base $\mathcal{C}$, dove $v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$.

Esercizio B

Nello spazio affine euclideo E^3 si considerino le rette:

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Determinare:
1) le equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2;
2) se r_1 e r_2 sono ortogonali;
3) se r_1 e r_2 sono incidenti e determinare il loro punto P di intersezione;
4) dato il punto $A_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \in r_1$, determinare il punto $A_2 \in r_2$ tale che il triangolo di vertici A_1, A_2, P sia isoscele in P;
5) le coppie di punti (B_1, B_2), dove $B_1 \in r_1$ e $B_2 \in r_2$, tali che il triangolo rettangolo di vertici B_1, B_2, P sia isoscele in P ed abbia area 6.