COGNOME ....NOME ....

CORSO DI LAUREA ....

Prova scritta di
GEOMETRIA e ALGEBRA LINEARE ED ELEM. GEOM.
7 gennaio 2004

Esercizio A

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

dove $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (1, -1, 2, 2), v_3 = (1, -1, 2, 0), v_4 = (1, 1, 0, -1), v_5 = (2, 0, 2, 0)$.
Posto $I = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, determinare una base $\mathcal{B}$ di W tale che $\mathcal{B} \subseteq I$ e sia ottenuta col metodo degli scarti successivi tramite la riduzione di matrici (INDICARE LE OPERAZIONI DI RIDUZIONE).

Esercizio B

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $f(x, y, z) = (2y - 2z, 2y - 3z, -z)$. Determinare:
1) la matrice $M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2) una base di $\ker(f)$;
3) una base di $\mathrm{Im}(f)$.
4) la controimmagine del vettore $v = (0, 1, 1)$;
5) la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbb{R}^3$ data da $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$;
6) la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Esercizio C

Nello spazio affine euclideo E^3 siano dati il piano $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$ e le due rette

$$r : \ (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, -1, -1), \qquad s : \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca (incidenti o no, con eventuale intersezione, paralleli, ortogonali, ecc.) di:
1) r ed s; 2) r e π; 3) s e π.
Determinare inoltre:
4) un'equazione della retta l contenuta in π, incidente r ed s ed ortogonale ad r;
5) se l ed s sono ortogonali (motivare all'interno).

N.B. Le seguenti due domande sono riservate agli studenti dei prof. Brundu e Sacchiero.

6) Determinare il fascio $\mathcal{F}$ di piani di sostegno s e il fascio $\mathcal{G}$ di piani ortogonali ad r;
7) determinare $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

N.B. Le seguenti due domande sono riservate agli studenti del prof. Landi.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $f(x, y, z) = (2y - 2z, 2y - 3z, -z)$. Determinare:
6) gli autovalori di f e autospazi relativi;
7) se f è semplice (motivare all'interno).