

COGNOMENOME
CORSO DI LAUREA

Prova Scritta di GEOMETRIA e di
ALGEBRA LINEARE ED ELEM. DI GEOMETRIA

19 giugno 2003

I. Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = A$, dove \mathcal{E} è la base canonica di \mathbb{R}^4 . Determinare:

- 1) lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $AX = 0$;
- 2) le equazioni di f ;
- 3) una base \mathcal{B} di $\ker(f)$;
- 4) una base \mathcal{C} di $\text{Im}(f)$;
- 5) un completamento di \mathcal{B} ad una base \mathcal{D} di \mathbb{R}^4 , usando vettori di \mathcal{E} ;
- 6) la matrice $M_f^{\mathcal{D},\mathcal{E}}$.

II. Nel piano euclideo di origine O , sia data la retta r il cui punto generico ha coordinate $P(t) = (1+t, 1-t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Determinare:

- 7) la distanza $d(O, P(t))$ al variare di t in \mathbb{R} ;
- 8) il valore di t ed il corrispondente punto H di r per cui la distanza da O è minima;
- 9) l'equazione cartesiana della retta s passante per H ed O ;
- 10) che s è ortogonale ad r ;
- 11) i punti $A, B \in r$ tali che la loro distanza dall'origine è uguale a 2;
- 12) l'area del triangolo di vertici O, A, B .