COGNOME .....NOME .....

CORSO DI LAUREA .....

Prova scritta di GEOMETRIA

18 settembre 2001

I. Si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[X]_n$ dei polinomi di grado minore o uguale ad n. Si consideri inoltre l'applicazione

$$\varphi_n : \quad \mathbb{R}[X]_n \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{n-1}$$

definita da: $\varphi_n(p(X)) = p'(X)$, dove $p'(X)$ è l'usuale derivata del polinomio $p(X)$ rispetto alla variabile X. Si denoti infine con $\mathcal{E}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base naturale di $\mathbb{R}[X]_n$.

1) Provare che $\varphi_3 : \quad \mathbb{R}[X]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$ è un'applicazione lineare.

Determinare:

2) la matrice $M_{\varphi_3}^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2}$;

3) se φ_3 è suriettiva (motivare all'interno);

4) una base di $\ker(\varphi_3)$;

5) la matrice $M_{\varphi_2}^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1}$, dove ovviamente $\varphi_2 : \quad \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_1$ è definita come sopra;

6) le equazioni dell'applicazione composta $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_3 : \quad \mathbb{R}[X]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_1$;

7) la matrice $M_{\psi}^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_1}$.

II. Nel piano euclideo si consideri la famiglia di coniche definita da:

$$C_\lambda : \quad (x-y)^2 + \lambda(x+y-2) = 0$$

dove λ è un parametro reale.

8) Classificare le coniche C_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Determinare:

9) il valore $\overline{\lambda}$ per cui $C_{\overline{\lambda}}$ è non degenere e tangente all'asse x. Si denoti con Γ la conica $C_{\overline{\lambda}}$ così ottenuta.

10) L'asse di Γ;

11) il vertice V di Γ;

12) la retta tangente a Γ in V;

13) una forma canonica di Γ.

RISPOSTE

---

1) all'interno 2) 3) 4)

---

5) 6)

---

7) 8) 9)

---

10) 11) 12) 13)