COGNOME .....NOME .....

CORSO DI LAUREA .....

Prova scritta di GEOMETRIA

26 giugno 2000

I. Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbb{R}^3$, dove $U := (\mathcal{L}(1,2,-1))^{\perp}$ e V è lo spazio delle soluzioni dell'equazione: $x + 2y + 2z = 0$. Determinare:
1) un'equazione cartesiana di $U \cap V$ (come spazio delle soluzioni di un sistema ridotto);
2) una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$;
3) una base $\mathcal{C}$ di U che sia un completamento di $\mathcal{B}$;
4) una base $\mathcal{D}$ di V che sia un completamento di $\mathcal{B}$.
Sia $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ contenente sia $\mathcal{C}$ che $\mathcal{D}$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo. Determinare:
5) $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ in modo che $f(U) = V$ e $f(V) = U$;
6) la matrice $M_f^{\mathcal{F},\mathcal{F}}$;
7) gli autovalori di f;
8) le basi degli autospazi di f, i cui vettori siano espressi rispetto ad $\mathcal{F}$;
9) le basi degli autospazi di f, i cui vettori siano espressi rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
10) se f è semplice (motivare all'interno).

II. Nello spazio affine euclideo E^3 si considerino i quattro punti

$$A = (0,1,1), \quad B = (2,2,-1), \quad C = (3,4,1), \quad D = (1,3,3).$$

11) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i quattro punti;
12) verificare che i quattro punti sono i vertici di un quadrato (verifica all'interno);
13) determinare il lato del quadrato.
Posti A', B', C', D' i punti tali che $A, B, C, D, A', B', C', D'$ siano i vertici di un cubo, determinare:
14) un piano α contenente A', B', C', D';
15) il punto A'.

RISPOSTE

1) 2) 3)

4) 5)

6) 7) 8)

9) 10) 11)

13) 14) 15)