COGNOME ..... NOME .....

CORSO DI LAUREA .....

Prova scritta di GEOMETRIA

25 gennaio 2000

I. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $A_t \in \mathbb{R}^{4,4}$ la matrice

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -t \\ 1 & 1+t & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia Σ_t il sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, t la cui matrice dei coefficienti è A_t. Sia inoltre $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata ad A_t rispetto alla base canonica. Determinare:
1) una base per lo spazio delle soluzioni del sistema Σ_0 (cioè del sistema Σ_t per $t = 0$);
2) una base di $\ker(f_0)$;
3) una base di $\mathrm{Im}(f_0)$;
4) se $\ker(f_0)$ e $\mathrm{Im}(f_0)$ sono tra loro ortogonali;
5) quali vettori di $\mathrm{Im}(f_0)$ sono ortogonali a $\ker(f_0)$;
6) un'equazione cartesiana di $\ker(f_0)$;
$*$7) due vettori $v \in \ker(f_0)$ e $w \in \mathrm{Im}(f_0)$ tali che $v + w = (2, 1, 0, 0)$;
$*$8) se v e w del punto precedente sono univocamente determinati;
9) la dimensione dello spazio delle soluzioni di Σ_t al variare di t in $\mathbb{R}$;
10) la dimensione di $\ker(f_t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.

II. Nello spazio affine euclideo E^3 si consideri la famiglia di triangoli Δ_t di vertici $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 1)$ e $C_t = (t, 0, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$. Determinare:
11) se i triangoli Δ_t giacciono tutti nello stesso piano;
12) un'equazione cartesiana della retta r passante per A e B;
13) il fascio $\mathcal{F}$ di piani di sostegno r;
14) l'equazione cartesiana del piano di $\mathcal{F}$ che non contiene alcun triangolo Δ_t;
15) l'equazione cartesiana del piano passante per A e contenente tutti i punti C_t, al variare di t in $\mathbb{R}$;
16) la distanza di C_t dalla retta r;
17) l'area di Δ_t al variare di t.

RISPOSTE

1) 2) 3)

4) 5) 6) 7)

8) 9) 10) 11)

12) 13) 14)

15) 16)

17)