Facoltà di Ingegneria

Precorso di Matematica

Parte I : Fondamenti di Matematica

1. Teoria degli insiemi e cenni di logica

Il concetto di insieme costituisce l'elemento fondante di gran parte delle esposizioni della matematica moderna.

Intuitivamente con il termine insieme si indica una collezione di oggetti chiamati *elementi* dell'insieme. Ciò che caratterizza il concetto di insieme e lo differenzia dai concetti analoghi sono essenzialmente le seguenti proprietà:

- un elemento può appartenere o non appartenere a un determinato insieme;
- un elemento non può comparire più di una volta in un insieme;
- gli elementi di un insieme non hanno un ordine di comparizione;
- gli elementi di un insieme lo caratterizzano univocamente: due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.

In molte esposizioni il concetto di insieme considerato *primitivo* ed *intuitivo*:

- "primitivo" perché viene introdotto come nozione non derivabile da concetti più elementari;
- "intuitivo" perché viene introdotto come generalizzazione della nozione di insieme finito.

Solitamente un insieme viene indicato con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, X, Y ... e si chiede che sia univocamente determinato: se diciamo "M è l'insieme degli x tali che x è uno studente di Ingegneria" supponiamo che si sappia decidere che ad M non appartengono persone che non hanno le caratteristiche considerate.

Un insieme può essere definito nei seguenti modi:

- in *forma tabulare* o *per elencazione*: vengono elencati tutti gli elementi. In tal caso la convenzione comune è quella di scrivere l'elenco degli elementi tra parentesi graffe separati da virgole, ad esempio:

$$F = \{\text{rosa}, \text{giglio}, \text{geranio}\}.$$

  Chiaramente, questo tipo di definizione è utilizzabile solo nel caso di insiemi finiti; per gli insiemi infiniti si fa talvolta uso di puntini di sospensione laddove si ritiene che sia evidente il criterio secondo cui si possono individuare gli elementi non indicati esplicitamente; ad esempio:

$$X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}.$$

- Per *caratteristica*: come l'insieme di tutti gli oggetti che verificano una determinata proprietà $\mathcal{P}$. In tal caso si usa la scrittura

$$\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$$

dove al posto di $\mathcal{P}(x)$ può comparire la descrizione di una particolare proprietà. Ad esempio:

$$F = \{x \mid x \text{ è un fiore}\}.$$

Qui F è definito come l'insieme degli x tali che x è un fiore. Oppure

$$G = \left\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ con } n \text{ numero intero positivo}\right\}.$$

Notazione 1.1. Per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriveremo

$$x \in A \quad \text{o anche} \quad A \ni x.$$

Come già osservato, due insiemi A e B sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi; scriveremo

$$A = B.$$

Definizione 1.2. Si dice che B è *sottoinsieme* di A o che B è *contenuto* in A se A contiene tutti gli elementi di B. Notare che secondo tale definizione ogni insieme è contenuto in se stesso. Per esprimere questo si usa la notazione:

$$B \subseteq A \quad \text{o anche} \quad A \supseteq B.$$

Se invece si vuole escludere la possibilità che B sia coincidente con A, cioè esistono effettivamente elementi di A non appartenenti a B, si usa la notazione:

$$B \subset A \quad \text{o anche} \quad A \supset B$$

che si legge: "B è un sottoinsieme proprio di A" oppure "B è contenuto propriamente in A".

Definizione 1.3. Una *implicazione logica* è un'operazione binaria tra proposizioni (o asserzioni) e viene generalmente rappresentata con il simbolo (o connettivo logico) $\Rightarrow$.

Date quindi due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il valore della nuova proposizione

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

(che si legge: "$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$") si può definire sulla base dei valori delle proposizioni di partenza secondo la seguente tabella di verità:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
falsa	falsa	vera
falsa	vera	vera
vera	falsa	falsa
vera	vera	vera

Una implicazione può essere anche espressa nella forma “se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$”, così ad esempio ci risulta naturale la comprensione di: “se piove allora ci sono nuvole in cielo” e l’unica possibilità che tale affermazione sia falsa è quella di verificare che in un dato momento piova ma NON ci siano nuvole in cielo.

Supponendo che sia vera $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ questa può anche essere espressa nei seguenti modi:

$$\mathcal{P} \text{ è condizione sufficiente per } \mathcal{Q}$$

o anche

$$\mathcal{Q} \text{ è condizione necessaria per } \mathcal{P}.$$

Applicando tali modi all’esempio precedente rispetto al linguaggio comune, possiamo affermare che condizione sufficiente perché in cielo ci siano nuvole è che piova e come condizione necessaria perché piova è che in cielo ci siano nuvole.

Definizione 1.4. Se accade che valgano contemporaneamente $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ allora possiamo esprimere questo fatto con un nuovo connettivo che chiameremo *coimplicazione* o *equivalenza*:

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}.$$

Potremo anche esprimere tale relazione dicendo che:

$$\mathcal{P} \text{ è condizione necessaria e sufficiente per } \mathcal{Q}$$

o che

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q} \text{ sono logicamente equivalenti.}$$

Definizione 1.5. Si dicono *quantificatori universali* i simboli

$$\forall \text{ (per ogni, qualunque) e } \exists \text{ (esiste).}$$

Negli esempi sarà chiaro l’utilizzo di tali quantificatori.

Osservazione 1.6. Vediamo il legame tra l’inclusione di insiemi e l’implicazione. Se A e B sono due insiemi e $B \subseteq A$, allora ogni elemento di B appartiene ad A, cioè

$$x \in B \;\Rightarrow\; x \in A.$$

Chiaramente è vero anche il viceversa, per definizione di inclusione. Quindi:

$$B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x : \; x \in B \;\Rightarrow\; x \in A).$$

In modo del tutto analogo, si vede facilmente che:

$$B = A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x : \; x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A \text{ e } A \subseteq B.$$

Definizione 1.6. L'insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto* e si denota con Φ.

Ovviamente l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni altro insieme; in simboli: $\Phi \subseteq A$, per ogni insieme A.

Definizione 1.7. Le principali operazioni tra insiemi sono:
- l'*unione* di due insiemi A e B: si indica con $A \cup B$ ed è l'insieme formato da tutti gli elementi di A e da tutti quelli di B presi una sola volta.
- l'*intersezione* di due insiemi A e B: si indica con $A \cap B$ ed è data dall'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B.
- la *differenza B meno A* si indica con $B \setminus A$ ed è data dall'insieme formato dai soli elementi di B che non appartengono ad A. Viene anche detto *insieme complementare* di A in B.

Concludiamo questa breve introduzione delle notazioni ricordando i principali insiemi numerici che incontreremo. Per alcuni di questi vedremo in seguito una introduzione più dettagliata (nel precorso o nel corso di Geometria).

Notazione 1.8. Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei *numeri naturali*, cioè:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Indichiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei *numeri interi relativi*, cioè:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Indichiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei *numeri razionali*, comunemente denotati come frazioni tra numeri interi:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Infine indichiamo con $\mathbb{R}$ e con $\mathbb{C}$, rispettivamente, l'insieme dei *numeri reali* e quello dei *numeri complessi.*

2. Applicazioni

2.1. Definizione. Un'*applicazione* tra due insiemi non vuoti A e B è il dato di tre oggetti:
- l'insieme A, detto *dominio*;
- l'insieme B, detto *codominio*;
- una *legge* f che associa ad ogni elemento $a \in A$ un elemento $f(a) \in B$.

Tale applicazione si denota con

$$f : A \to B$$

e sugli elementi si denota con

$$a \mapsto f(a).$$

L'elemento $f(a)$ si dice *immagine* di a.

2.1.1. Esempio. Sia f la legge che ad ogni numero reale associa il suo quadrato. Evidententemente f è un'applicazione e precisamente:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{dove} \quad x \mapsto x^2.$$

2.1.2. Esempio. La legge $x \mapsto \sqrt{x}$ non è un'applicazione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, in quanto non è definita sui numeri reali negativi. Lo è invece se si considera come dominio l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi. In tal caso:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \text{dove} \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

2.1.3. Esempio. Dato un qualunque insieme A, l'applicazione

$$id_A \ : \quad A \longrightarrow A$$

definita da:

$$id_A(x) = x, \quad \forall x \in A$$

si dice *applicazione identica di A in sé.*

2.2. Definizione. Data un'applicazione $f : A \to B$, si dice *immagine* di f l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \quad \text{tale che} \quad f(a) = b\}.$$

Tale insieme immagine si denota anche con $f(A)$.

2.2.1. Esempio. Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{dove} \quad x \mapsto 1/(1 + x^2).$$

Si vede che $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

2.3. Definizione. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se $\mathrm{Im}(f) = B$, cioè

$$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A \quad \text{tale che} \quad f(a) = b.$$

2.3.1. Esempio. L'applicazione f dell'esempio 2.1.1 non è suriettiva, in quanto $-1 \in \mathbb{R}$ ma $-1 \notin \mathrm{Im}(f)$, cioè $\mathrm{Im}(f)$ è strettamente contenuta nel codominio $\mathbb{R}$.

2.4. Definizione. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se elementi distinti hanno immagini distinte, cioè

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

o, equivalentemente:

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

2.4.1. Esempio. L'applicazione f dell'esempio 2.1.1 non è iniettiva in quanto 2 e -2 sono elementi distinti del dominio aventi la stessa immagine:

$$2 \mapsto 2^2 = 4 \quad , \quad -2 \mapsto (-2)^2 = 4.$$

2.5. Definizione. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva, cioè:

$$\forall\, b \in B \quad \text{esiste un unico} \quad a \in A \quad \text{tale che} \quad f(a) = b.$$

2.5.1. Esempi. L'applicazione identica $id_A : A \longrightarrow A$ è biiettiva.
L'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $n \mapsto n+1$ è biiettiva.

2.6. Definizione. Se $f : A \to B$ è un'applicazione biiettiva, allora è individuata un'applicazione $g : B \to A$ tale che $g(b) = a$, dove $f(a) = b$. Tale applicazione è definita e unica poiché f è iniettiva e suriettiva; si dice *inversa* di f e si indica con f^{-1}.

2.6.1. Esempio. L'applicazione f dell'esempio 2.5.1 è biiettiva, dunque ammette inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{è definita da} \quad n \mapsto n-1.$$

2.7. Definizione. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due applicazioni. Si dice *applicazione composta* di f con g quella data da

$$g \circ f \;:\quad A \longrightarrow C$$

definita da: $x \mapsto g(f(x))$, per ogni $x \in A$.

2.7.1. Esempio. Si considerino le applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definite da: $f(n) = n^2 + 1$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $g(x) = \sqrt{x}$, per ogni $x \in \mathbb{N}$. Allora

$$g \circ f \;:\quad \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

è definita da: $n \mapsto g(f(n)) = \sqrt{n^2+1}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2.8. Osservazione. Un modo equivalente alla 2.6 per definire l'inversa di un'applicazione biiettiva $f : A \to B$ è il seguente: l'inversa di f è l'unica applicazione $g : B \to A$ tale che

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

3. Prodotto cartesiano e relazioni

3.1. Definizione. Siano A e B due insiemi (finiti o infiniti). Si dice *prodotto cartesiano* di A per B, e si denota con $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate di elementi di A e di B, cioè

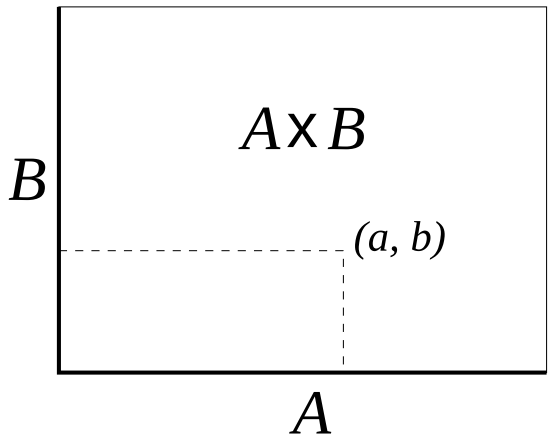
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

e si legge: "il prodotto cartesiano di A per B è uguale all'insieme delle coppie ordinate a, b tali che a appartiene ad A e b appartiene a B". L'insieme $A \times A$ si denota anche con A^2.

3.1.1. Esempio. Sia A l'insieme i cui elementi sono i simboli $\diamond, \star, \bullet$, cioè $A = \{\diamond, \star, \bullet\}$. Allora il prodotto cartesiano di A per se stesso è dato da:

$$A^2 = A \times A = \{(\diamond,\diamond), (\diamond,\star), (\diamond,\bullet), (\star,\diamond), (\star,\star), (\star,\bullet), (\bullet,\diamond), (\bullet,\star), (\bullet,\bullet)\}.$$

Spesso si rappresenta un prodotto cartesiano di due insiemi A e B con un disegno del tipo:

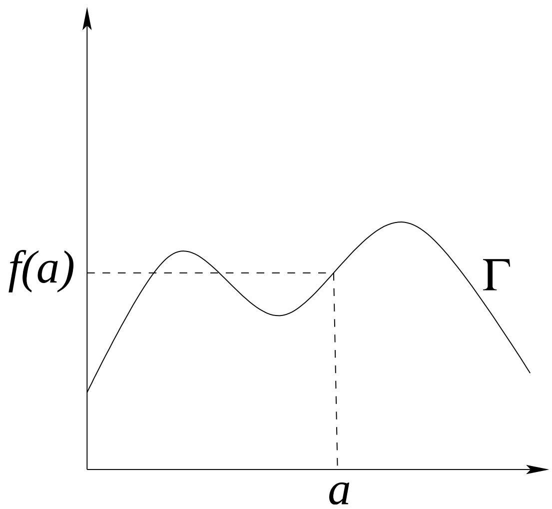


Vediamo ora due casi particolari di sottoinsiemi di un prodotto cartesiano: i grafici e le relazioni.

Se si vuole illustrare un'applicazione $f : A \to B$, il sottoinsieme di $A \times B$ dato da

$$\Gamma := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

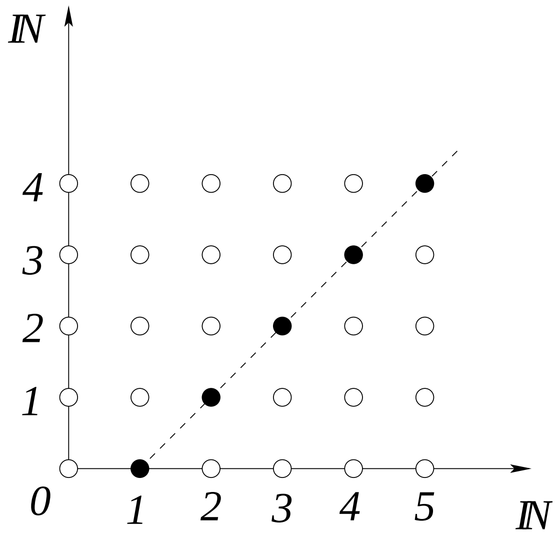
di dice *grafico* di f e si può rappresentare come segue:



Introduciamo ora la nozione di "relazione" in un insieme qualunque.

3.2. Definizione. Sia A un insieme. Una *relazione binaria* in A è un sottoinsieme qualunque del prodotto cartesiano $A \times A$. Se indichiamo con $\mathcal{R}$ tale sottoinsieme, diremo che due elementi a e b di A sono *in relazione* tra loro se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e scriveremo $a\mathcal{R}b$.

3.2.1. Esempio. Sia $A = \mathbb{N}$ e sia $\mathcal{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dei punti che si trovano sulla retta tratteggiata in figura.



Allora $2\mathcal{R}1$, ma non vale $1\mathcal{R}1$. In effetti, $\mathcal{R}$ è dato dalla formula

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : \quad n\mathcal{R}m \Leftrightarrow m = n - 1.$$

3.3. Definizione. Una relazione binaria in un insieme A si dice *relazione di equivalenza* se valgono le seguenti proprietà:
- riflessiva, cioè $a\mathcal{R}a$, per ogni $a \in A$;
- simmetrica, cioè $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$, per ogni $a, b \in A$;
- transitiva, cioè $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$, per ogni $a, b, c \in A$.

3.3.1. Esempi. L'uguaglianza è una relazione d'equivalenza (in ogni insieme!).
Nell'insieme dei triangoli, la congruenza e la similitudine sono relazioni d'equivalenza.
La relazione nell'esempio 3.2.1 non è di equivalenza, in quanto non vale la proprietà riflessiva. Infatti non vale $1\mathcal{R}1$.

3.4. Definizione. Sia A dotato di una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$. Per ogni $a \in A$, l'insieme $\{x \in A \mid x\mathcal{R}a\}$ si dice *classe d'equivalenza* di a e si denota con $[a]$. Ogni elemento x di $[a]$ si dice *rappresentante* della classe $[a]$ (ovviamente una classe ha tanti rappresentanti quanti sono i suoi elementi).

3.5. Proprietà.
1) Se $a\mathcal{R}b$, allora $[a] = [b]$.
2) Se $(a, b) \notin \mathcal{R}$, allora $[a] \cap [b] = \emptyset$.
3) $A = \cup_{a\in A}[a]$, e tale unione è disgiunta.

<u>Dimostrazione</u>. 1) Proviamo che $[a] \subseteq [b]$; sia $x \in [a]$, allora $x\mathcal{R}a$; d'altra parte, per ipotesi $a\mathcal{R}b$. Dunque, per la proprietà transitiva, $x\mathcal{R}b$, cioè $x \in [b]$. Analogamente si verifica l'altra inclusione $[a] \supseteq [b]$.
2) Supponiamo per assurdo che $x \in [a] \cap [b]$. Allora vale $x\mathcal{R}a$ e $x\mathcal{R}b$; per la proprietà simmetrica $a\mathcal{R}x$ e quindi, per la transitività, $a\mathcal{R}b$, contro l'ipotesi.
3) è ovvio, usando la 2). •

3.6. Definizione. La decomposizione $A = \cup_{a \in A}[a]$ è detta *partizione* di A *associata alla relazione d'equivalenza* $\mathcal{R}$.

3.7. Definizione. L'insieme costituito dalle classi di un insieme A con la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ è detto *insieme quoziente di* A *modulo* $\mathcal{R}$ e si indica con $A/\mathcal{R}$.
L'applicazione

$$\pi : \quad A \to A/\mathcal{R} \quad \text{definita da} \quad a \mapsto [a]$$

si dice *proiezione canonica sul quoziente.*