Facoltà di Ingegneria

Precorso di Matematica

Parte IV : Funzioni e luoghi geometrici

1. Equazioni e disequazioni

Richiamiamo brevemente la nozione di funzione, che sarà utilizzato in quest'ultima parte del precorso.

1.1. Definizione. Si dice *funzione (reale di variabile reale)* un'applicazione del tipo:

$$f: \quad U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

con U un qualunque sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

Le nozioni di immagine di un elemento, funzione iniettiva, suriettiva ecc. fanno riferimento alle analoghe nozioni date per le applicazioni (v. Parte I).

Un esempio notevole di funzione è il seguente:

1.1.1. Esempio. Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Tale funzione è chiamata *funzione valore assoluto.* Per esercizio, verificare che f non è ne iniettiva ne suriettiva.

1.2. Definizione. Si dice *equazione generalizzata* un'espressione del tipo

$$f(x) \in E$$

dove f è una funzione ed E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. In particolare, se $E = \{0\}$, l'espressione $f(x) = 0$ si dice *equazione.* Se invece $E = [0, +\infty)$, l'equazione generalizzata diventa: $f(x) \geq 0$ e si dice *disequazione.*

1.2.1. Esempio. Se $f(x) = |x| - 1$ ed $E = [1, 2) \cup \{3\}$, l'equazione generalizzata associata è:

$$|x| - 1 \in [1, 2) \cup \{3\}.$$

Se invece $E = \{0\}$, si ottiene l'equazione:

$$|x| - 1 = 0.$$

Infine, se fosse $E = [0, +\infty)$, si otterrebbe la disequazione

$$|x| - 1 \geq 0.$$

1.3. Definizione. Un insieme di equazioni e/o disequazioni si dice *sistema*. E' importante individuare i valori della variabile per i quali la scrittura di un sistema abbia senso. Tale insieme si dice *dominio* del sistema.

1.3.1. Esempio. Se si considera il sistema

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} = 2 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

è chiaro che il suo dominio è dato da $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. In generale, vale sempre il seguente fatto: il dominio di un sistema è l'intersezione dei domini delle singole equazioni e disequazioni.

1.4. Definizione. Si dice *soluzione* di un'equazione generalizzata $f(x) \in E$ di dominio D un numero $\alpha \in D$ tale che $f(\alpha)$ è un elemento di E, cioè $f(\alpha) \in E$ è "vera".
Si dice *soluzione* di un sistema un numero che sia soluzione di tutte le equazioni generalizzate che compongono il sistema.
L'insieme di tutte le soluzioni di un sistema Σ si dice *spazio delle soluzione* di Σ.

1.4.1. Esempio. Se si considera il sistema

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} = 2 \\ x(x^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

si vede facilmente che la prima equazione ammette come unica soluzione $\{0\}$ e la seconda ha esattamente tre soluzioni: $\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Pertanto lo spazio delle soluzioni di Σ è $S = \{0\}$.

Un'equazione $f(x) = 0$ si dice *identità* se il suo spazio delle soluzioni coincide col dominio.

Un sistema si dice *impossibile* se non ammette soluzioni ovvero se il suo spazio delle soluzioni è l'insieme vuoto.

Due sistemi si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso spazio delle soluzioni.

Nei corsi successivi saranno studiate anche equazioni e disequazioni con più di una variabile reale. Diamo qui un breve cenno di questa nozione.

1.5. Definizione. Si dice *funzione reale di due variabili reali* un'applicazione del tipo:

$$f: \quad U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove U e V sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e $U \times V$ denota il loro prodotto cartesiano.

1.5.1. Esempio. Si consideri la funzione

$$f: \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^3$. E' chiaro che il dominio di tale funzione è $\mathbb{R}^2$.

Le nozioni di equazione generalizzata, equazione, disequazione, sistema ecc. in più variabili sono analoghe a quelle date in una variabile.

Se alcune tra le variabili vengono considerate "numeriche", esse vengono chiamate *parametri*. Per ogni valore che si attribuisce ai parametri, si ottiene una diversa equazione, come mostra il seguente esempio.

1.5.2. Esempio. Si consideri l'equazione

$$ax^2 - x = 0, \quad \text{con } a \text{ parametro reale.}$$

Le soluzioni di tale equazione sono: $S = \{0, 1/a\}$, se $a \neq 0$; $S = \{0\}$, se $a = 0$.

2. Funzioni circolari

Nell'analisi matematica è convenzione misurare gli angoli in *radianti*.
Si consideri nel piano una circonferenza Γ di centro l'origine O e di raggio r e sia A il punto di intersezione di Γ con il semiasse positivo delle x. Per ogni punto $P \in \Gamma$, si consideri l'arco di circonferenza AP (percorso in senso antiorario).
La misura in *radianti* dell'angolo $\widehat{OAP}$ di centro O è il numero

$$\frac{AP}{r}.$$

Se $r = 1$, si ottiene la *circonferenza trigonometrica*. Chiaramente su di essa la misura in radianti di un angolo coincide con la lunghezza dell'arco corrispondente.

2.1. Definizione. Fissato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo l'unico punto P della circonferenza trigonometrica tale che $AP = x$.
Si dice *coseno* di x, e si indica con $\cos x$, l'ascissa del punto P; si dice *seno* di x, e si indica con $\sin x$, l'ordinata del punto P.

E' evidente che vale la seguente fondamentale identità trigonometrica:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dalla definizione precedente, si ha immediatamente che seno e coseno sono funzioni reali di variabile reale definite su tutto $\mathbb{R}$.
E' facile vedere che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

ovvero le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono *periodiche* di periodo 2π.
Altre relazioni notevoli sono:

$$\begin{array}{ll} \sin(x+\pi) = -\sin x\ , & \cos(x+\pi) = -\cos x \\ \sin(x+\pi/2) = \cos x\ , & \cos(x+\pi/2) = -\sin x \end{array}.$$

Infine citiamo le formule di addizione (da cui si possono ricavare facilmente le formule di duplicazione e bisezione):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}.$$

Introduciamo due ulteriori funzioni trigonometriche, dette rispettivamente *tangente* e *cotangente* definite da:

$$\mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \mathrm{ctg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

La funzione tangente è definita per ogni x tale che $\cos x \neq 0$, cioè il suo dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Analogamente la funzione cotangente è definita per ogni x tale che $\sin x \neq 0$, cioè il suo dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Entrambe sono periodiche, ma di periodo π.

Citiamo alcuni esempi di equazioni e disequazioni che coinvolgono funzioni trigonometriche:

$$\begin{gathered} \sin x = k,\ \cos x = k,\ \mathrm{tg}\ x = k \\ \sin x \geq k,\ \cos x \geq k \\ a\sin x + b\cos x = c. \end{gathered}$$

3. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

L'applicazione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $z = a + ib \mapsto (a, b)$ è chiaramente biiettiva. Abbiamo visto che, fissato un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) $(O; x, y)$ nel piano, i punti del piano sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali. Pertanto si hanno le corrispondenze biunivoche:

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \{\text{punti del piano}\}.$$

Ciò significa che, fissato un riferimento $(O; x, y)$ nel piano, si può rappresentare (in modo univoco) ogni numero complesso $z = a + ib$ come un punto del piano di coordinate (a, b).
Osserviamo che i punti dell'asse x corrispondono ai numeri reali o, più in generale, alla parte reale dei numeri complessi, e che i punti dell'asse y corrispondono ai numeri immaginari, o, più in generale, alle parti immaginarie.

Tale rappresentazione geometrica è detta *piano di Argand–Gauss.*

Per determinare un numero complesso $z = a+ib$ si può, ad esempio, individuare il punto A del piano che lo rappresenta (cioè il punto di coordinate (a, b)), e di conseguenza il vettore OA ad esso associato, determinando il modulo ρ di OA (cioè la sua lunghezza) e l'angolo α che esso forma con la direzione positiva dell'asse x.

Si ha dunque:

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}\ , \quad \alpha = \text{una soluzione del sistema} \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

3.1. Definizione. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Con la precedente interpretazione, ρ è detto *modulo* di z e si indica con $\parallel z \parallel$ e α è detto *argomento* di z e si indica con $\arg(z)$. Dunque z è individuato dalla coppia (ρ, α) e si scriverà anche $z = (\rho, \alpha)$. Inoltre ρ ed α si dicono *coordinate trigonometriche* di z.

Notiamo che $\arg(z)$ si misura in radianti ed è definito a meno di un multiplo intero di 2π, cioè se $z = (\rho, \alpha)$, anche $(\rho, \alpha + 2k\pi)$, per ogni intero k, rappresenta le coordinate trigonometriche di z.

Ovviamente, le espressioni di a e b in funzione di ρ e α sono

$$a = \rho\cos\alpha \quad ; \quad b = \rho\sin\alpha;$$

dunque $z = a + ib = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Tale espressione si dice *rappresentazione trigonometrica* del numero complesso z.

Tale rappresentazione è unica, a meno di un multiplo intero di 2π, cioè vale la seguente

3.2. Proposizione. *Siano $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $z' = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ due numeri complessi. Allora $z = z'$ se e solo se $\rho = \rho'$ e $\alpha - \alpha' = 2k\pi$, per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$.* •

3.2.1. Esempio. Sia $z = 1 + i$. Allora $\parallel z \parallel = (1 + 1)^{1/2} = \sqrt{2}$; $\arg(z) = \alpha$ è soluzione di

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Dunque, ad esempio, $\alpha = \pi/4$; pertanto $z = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$ è la rappresentazione trigonometrica di z.

La rappresentazione trigonometrica è particolarmente utile per il calcolo del prodotto di due numeri complessi e in particolare per calcolare le potenze di un numero complesso. Infatti, sia $z = a + ib = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $z' = a' + ib' = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$. Dunque

$$zz' = \rho\rho'[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')]$$

da cui, per le note formule trigonometriche:

$$zz' = \rho\rho'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')). \tag{1}$$

Cioè il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.
In particolare $z^2 = \rho^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$ e in generale vale la seguente:

3.3. Proposizione. *Per ogni intero positivo n si ha*

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \tag{2}$$

•

4. Radici n-esime di un numero complesso

Come visto in precedenza, il numero i è una soluzione dell'equazione $X^2 = -1$. Poiché $\mathbb{C}$ è un campo, anche $-i$ appartiene a $\mathbb{C}$; inoltre è ovviamente soluzione della stessa equazione. Ci chiediamo se i e $-i$ sono tutte le soluzioni di questa equazione e, più in generale, come calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $X^n = z$, ove z è un numero complesso.
Se z è reale, le soluzioni reali di tale equazione sono ben note; infatti se n è dispari esiste una ed una sola soluzione reale, che si denota con $\sqrt[n]{z}$. Se invece n è pari e z reale positivo, si hanno due soluzioni reali denotate con $\pm \sqrt[n]{z}$. Infine nessuna soluzione reale si ha per n pari e z reale negativo.

Sia ora z un qualunque numero complesso e sia x una soluzione dell'equazione, cioè un numero complesso tale che $x^n = z$.
Rappresentiamo z e x in forma trigonometrica:

$$z = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)\ ; \quad x = \sigma(\cos\phi + i \sin\phi).$$

Sostituendo in $x^n = z$ si ha: $\sigma^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Pertanto, per la proposizione 2.4, $\sigma^n = \rho$ e $n\phi - \alpha = 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$. Dunque

$$\sigma = \sqrt[n]{\rho} \quad ; \qquad \phi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Posto $\phi_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$, osserviamo che

$$\phi_0 = \frac{\alpha}{n}, \quad \phi_1 = \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \phi_{n-1} = \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Le funzioni trigonometriche seno e coseno degli angoli ϕ_k sono distinte per ogni $k = 0, 1, \dots, n-1$, in quanto $|\phi_i - \phi_j| < 2\pi$. Pertanto anche le radici $x_k = \sigma(\cos\phi_k + i \sin\phi_k)$ sono distinte per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Sia ora $k = n$: si ottiene

$$\phi_n = \frac{\alpha + 2n\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi = \phi_0 + 2\pi.$$

Dunque $x_n = x_0$. Analogamente si può vedere che $x_{n+1} = x_1$ e così via. Abbiamo dunque provato il seguente

4.1. Teorema. *L'equazione $X^n = z$, con $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ ha n soluzioni complesse distinte $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (dette radici n-me di z) della forma*

$$x_k = \sigma(\cos\phi_k + i \sin\phi_k), \ \textit{per } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

ove $\sigma = \sqrt[n]{\| z \|}$ e $\phi_k = \frac{\arg(z)+2k\pi}{n}$. •

4.2. Osservazione. Notiamo che tutte le x_k hanno modulo uguale, pari a σ. Inoltre gli n argomenti distinti $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ sono tali che $\phi_i - \phi_{i-1} = 2\pi/n$, per ogni i. Nel piano di Argand–Gauss si rappresentano perciò come n punti appartenenti al cerchio di centro O e raggio σ, che dividono l'angolo 2π in n parti uguali, a partire da α/n. In altri termini gli x_k rappresentano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio σ.

4.2.1. Esempio. Le soluzioni di $X^2 = 1$ sono: $x_k = (\cos\phi_k + i\sin\phi_k)$, $k = 0, 1$. Scrivendo 1 in forma trigonometrica $1 = \cos 0 + i \sin 0$, si vede che $\alpha = 0$ e quindi $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 2\pi/2 = \pi$. Pertanto $x_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, $x_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

4.2.2. Esempio. Le soluzioni di $X^3 = 8$ sono: $x_k = 2(\cos\phi_k + i\sin\phi_k)$, $k = 0, 1, 2$. Poiché $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$, $\alpha = 0$ e quindi $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 2\pi/3$, $\phi_2 = 4\pi/3$. Da cui: $x_0 = 2$, $x_1 = 2(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3) = -1 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 2(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3) = -1 - i\sqrt{3}$.

5. Geometria analitica del piano

Ricordiamo che una *retta del piano* è il luogo dei punti del piano le cui coordinate (x, y) soddisfano un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

dove a, b, c sono parametri reali e a e b non sono entrambi nulli.
In particolare, se $b \neq 0$, dividendo ambo i membri della precedente equazione per b, si ottiene un'equazione equivalente (detta *equazione normale*) del tipo:

$$y = mx + q.$$

Il numero m si dice *coefficiente angolare* della retta ed è facile vedere che coincide con la tangente dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle x. Il numero q si dice *intercetta* e coincide con l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y.
Si noti che l'equazione normale non descrive tutte le rette del piano: sono escluse quelle parallele all'asse x, che corrispondono al caso $b = 0$, e sono del tipo $x = k$.

Vale il seguente fatto:

5.1.Proposizione. *Siano r ed r' due rette del piano di equazioni:*

$$r : y = mx + q \quad ; \qquad r' : y = m'x + q'.$$

Allora:

$$r \text{ e } r' \text{ sono parallele} \iff m = m';$$
$$r \text{ e } r' \text{ sono ortogonali} \iff mm' = -1.$$

Diamo ora qualche cenno sulle coniche, introducendole come luoghi geometrici, cioè come insiemi di punti del piano caratterizzati da proprietà geometriche.

5.2. Definizione.

- Si dice *ellisse* il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissati (detti *fuochi*).
- Si dice *iperbole* il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissati (detti *fuochi*).
- Si dice *parabola* il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fissato (detto *fuoco*) e da una retta fissata (detta *direttrice*).

In un opportuno sistema di riferimento, le equazioni delle coniche introdotte sopra hanno una forma particolarmente semplice, detta *forma canonica*:

$$\begin{aligned} \text{ellisse:} \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{iperbole:} \quad & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{parabola:} \quad & y = 2px^2. \end{aligned}$$

Tuttavia, in generale, una conica è il luogo punti del piano di coordinate (x, y) che soddisfano un'equazione polinomiale di secondo grado in due variabili, cioè del tipo:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$