# Capitolo IX
# DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI SIMMETRICHE

## 1. Matrici ortogonali

Ricordiamo che, nel Cap. VII, abbiamo studiato le matrici di cambio di base in un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale. In tale occasione, abbiamo osservato che ogni matrice di cambio di base è invertibile e che, viceversa, ogni matrice $n \times n$ invertibile si può interpretare come matrice di cambio di base in $\mathbb{R}^n$ (vedi 8.4 e 8.5 Cap. VII).

In questo capitolo studieremo gli endomorfismi dello spazio vettoriale euclideo $E^n = (\mathbb{R}^n, \cdot)$, dove " $\cdot$ " è il prodotto scalare euclideo. In tale ambiente, come visto nel Cap. IV, la nozione significativa di base è quella di base ortonormale. Quindi la corrispondenza tra matrici invertibili e quelle di cambio di base, quando specificata al caso delle basi ortonormali, da luogo alla seguente

**1.1. Definizione.** Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *ortogonale* se le colonne di $A$ formano una base ortonormale $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale euclideo $E^n$; in tal caso $A$ coincide con la matrice del cambio di base, ovvero $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.

È chiaro dunque che una matrice ortogonale è in particolare invertibile.

**1.1.1. Esempio.** La matrice identica $I_n$ è ortogonale per ogni $n$. Anche la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale, in quanto le sue colonne

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

sono una base ortonormale di $E^2$, come si verifica immediatamente.

**1.2. Proposizione.** *Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonale se e solo se*

$${}^tAA = I_n$$

*cioè se ${}^tA = A^{-1}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Fissiamo la seguente notazione (per colonne): sia $A = (v_1 \cdots v_n)$, dove $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori colonna di $E^n$. Di conseguenza

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo la seguente catena di equivalenze:
$A$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ $(v_1, \ldots, v_n)$ è base ortonormale di $E^n$ $\Leftrightarrow$ $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, per ogni $i, j$ $\Leftrightarrow$ $({}^tAA)_{ij} = \delta_{ij}$, per ogni $i, j$ $\Leftrightarrow$ ${}^tAA = I_n$. $\square$

**1.2.1. Esempio.** Con il criterio precedente, la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{per la quale} \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale. Infatti ${}^tAA = I_2$.

**1.2.2. Esempio.** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non è ortogonale, infatti ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$.

**1.3. Proposizione.** *Se* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *è ortogonale, allora* $\det(A) = \pm 1$.

Dimostrazione. Infatti poichè ${}^tAA = I_n$, per il teorema di Binet (5.13, Cap. V) si ha

$$\det({}^tA)\det(A) = \det(I_n) = 1.$$

Ma $\det({}^tA) = \det(A)$ (per 5.9, Cap. V), pertanto $(\det(A))^2 = 1$ e quindi si ha la tesi. □

**1.4. Osservazione.** Non vale il viceversa; ad esempio la matrice dell'esempio 1.2.2 ha determinante 1, ma non è ortogonale.

**1.5. Definizione.** Una matrice ortogonale con determinante 1 si dice *ortogonale speciale.*

**1.6. Proposizione.** *L'insieme*

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ è ortogonale}\}$$

*è un gruppo rispetto all'usuale prodotto di matrici. Inoltre il suo sottoinsieme*

$$SO(n) := \{A \in O(n) \mid A \text{ è ortogonale speciale}\}$$

*forma un suo (sotto)-gruppo rispetto allo stesso prodotto.*

Dimostrazione. Mostriamo che $O(n)$ è chiuso rispetto al prodotto, ha un elemento neutro ed è chiuso rispetto all'inverso.

- Se $A, B$ sono due matrici ortogonali, per il loro prodotto vale ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tB\,I_nB = {}^tBB = I_n$, da cui il prodotto $AB$ è a sua volta ortogonale.
- Abbiamo già notato che la matrice identica $I_n$ è ortogonale.
- Se $A$ è ortogonale, ovvero ${}^tAA = I_n$, allora ${}^t(A^{-1})A^{-1} = (A\,{}^tA)^{-1} = I_n$ da cui segue che $A^{-1}$ è a sua volta ortogonale.

Infine, dal teorema di Binet per il determinante del prodotto di matrici, segue facilmente che le matrici ortogonali di determinante 1 formano a loro volta un gruppo. □

**1.7. Definizione.** Il gruppo $O(n)$ si dice *gruppo ortogonale* di ordine $n$ e il suo sottogruppo $SO(n) \subset O(n)$ si dice *gruppo ortogonale speciale.*

Nella definizione 1.1 di matrice ortogonale, non è necessario che la seconda base sia quella canonica, infatti se si usasse la proposizione 1.2 come definizione, vale a dire si dichiarasse che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonale se ${}^tAA = I_n$, allora le matrici ortogonali sono tutte e sole le matrici di cambio base tra due basi ortonormali.

**1.8. Teorema.** *Siano $\mathcal{B}$ una qualunque base e $\mathcal{C}$ una base ortonormale dello spazio euclideo $E^n$. Allora si ha che la matrice del cambio base*

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{ è ortogonale } \iff \mathcal{B} \text{ è una base ortonormale.}$$

<u>Dimostrazione</u>. Osserviamo dapprima che $\mathcal{C}$ è una base ortonormale dunque, posta $\mathcal{E}$ la base canonica, la matrice del cambio base $M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ è ortogonale per definizione, così come la sua inversa $(M^{\mathcal{C},\mathcal{E}})^{-1} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}}$, in quanto $O(n)$ è un gruppo.
Inoltre, se $\mathcal{B}$ è una qualunque base, per 8.6, Cap. VII, vale che

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} M^{\mathcal{E},\mathcal{E}} M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} I_n M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}.$$

"$\Leftarrow$" Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, anche la matrice del cambio base $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ è ortogonale; quindi $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è ortogonale essendo il prodotto di due matrici ortogonali.

"$\Rightarrow$" Se $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è ortogonale, dalla precedente relazione si ricava che

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = (M^{\mathcal{E},\mathcal{C}})^{-1} M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M^{\mathcal{C},\mathcal{E}} M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

ovvero anche la matrice del cambio base $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ è ortogonale (di nuovo essendo il prodotto di due matrici ortogonali). Se ne conclude che la base $\mathcal{B}$ è una base ortonormale. $\square$

Al fine di associare le matrici ortogonali ad una classe importante di endomorfismi, ricordiamo la forma particolare che assume il prodotto scalare di due vettori in funzioni delle loro componenti *rispetto a una base ortonormale.* Più precisamente, per 1.20, Cap. IV, si ha la seguente

**1.9. Osservazione.** Sia $\mathcal{C}$ una base ortonormale dello spazio euclideo $E^n$. Se $v, w \in E^n$ sono due vettori di componenti note sulla base $\mathcal{C}$, cioè $v = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{C}}$ e $w = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{C}}$, allora $v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. In altri termini, denotando con $X$ e $Y$ le matrici colonna delle rispettive componenti rispetto a $\mathcal{C}$, cioè

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

si ha

$$v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tXY.$$

Vediamo adesso delle proprietà degli endomorfismi di $E^n$ associati a matrici ortogonali.

**1.10. Teorema.** *Sia $\phi$ un endomorfismo dello spazio euclideo $E^n$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Sono fatti equivalenti:*

*i)* *la matrice $A = M_{\phi}^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è ortogonale;*

*ii)* *$\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$ per ogni $v, w \in E^n$;*

*iii)* *se $(b_1, \ldots, b_n)$ è una qualunque base ortonormale di $E^n$, allora $(\phi(b_1), \ldots, \phi(b_n))$ è ancora una base ortonormale.*

Dimostrazione. *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* Siano $X = {}^t v$ e $Y = {}^t w$; allora, applicando opportunamente 1.9: da una parte $\phi(v) \cdot \phi(w) = {}^t(AX)(AY) = {}^tX({}^tAA)Y$; d'altra parte $v \cdot w = {}^tXY$. Quindi da ${}^tAA = I_n$ segue che $\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$ per ogni $v, w \in E^n$. D'altra parte se vale${}^t(AX)(AY) = {}^tXY$ per ogni $X, Y \in E^n$ allora ${}^tAA = I_n$, ovvero la matrice $A$ è ortogonale.

*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Dall'equivalenza precedente, segue che la matrice $M_{\phi}^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è ortogonale ed in particolare invertibile. Di consequenza $\phi$ è un isomorfismo (cf. 7.4 Cap. VII) e quindi manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti; in particolare manda basi in basi. Partendo da una base ortonormale $(b_1, \ldots, b_n)$ la base $(\phi(b_1), \ldots, \phi(b_n))$ è ancora una base ortonormale in quanto $\phi(b_i) \cdot \phi(b_j) = b_i \cdot b_j = \delta_{ij}$.

*iii)* $\Rightarrow$ *i)* In particolare, le immagini $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ formano una base ortonormale di $E^n$; ma queste sono proprio le colonne di $A$, dunque $A$ è ortogonale per definizione. $\square$

Quindi se $\phi \in End(E^n)$ è associato ad una matrice ortogonale rispetto alla base canonica, $\phi$ è un isomorfismo e conserva il prodotto scalare, ovvero, ribadiamo, per ogni $v, w \in E^n$:

$$v \cdot w = \phi(v) \cdot \phi(w).$$

Un tale endomorfismo si dice anche *isometria*. Si ha anche immediatamente che un'isometria $\phi$ preserva la norma di un vettore:

**1.11. Corollario.** *Sia $\phi \in End(E^n)$ un endomorfismo associato ad una matrice ortogonale rispetto alla base canonica; allora, per ogni $v \in E^n$, si ha:*

$$\| \phi(v) \| = \| v \| .$$

$\square$

## 2. Endomorfismi autoaggiunti

Di particolare interesse risulta essere la seguente classe di endomorfismi (che proveremo in seguito essere in particolare semplici).

**2.1. Definizione**. Un endomorfismo $\phi$ di $E^n$ si dice *autoaggiunto* se

$$\phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w) \qquad \forall\, v, w \in E.$$

Sappiamo da 1.12, Cap.VIII che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Per gli endomorfismi autoaggiunti vale una proprietà più forte:

**2.2. Proposizione.** *Sia $\phi$ un endomorfismo autoaggiunto di $E^n$ e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ due suoi autovalori distinti. Se $v_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2$, sono due autovettori non nulli, allora $v_1, v_2$ sono ortogonali.*

Dimostrazione. Essendo $\phi$ autoaggiunto si ha $\phi(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2)$. D'altra parte, poiché $v_1$ e $v_2$ sono autovettori: $\phi(v_i) = \lambda_i v_i$ per $i = 1, 2$. Quindi l'ipotesi di autoaggiuntezza diventa

$$(\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2),$$

da cui

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_2 - \lambda_1)(v_1 \cdot v_2) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Essendo gli autovalori distinti per ipotesi, ne segue che $v_1 \cdot v_2 = 0_{\mathbb{R}}$, ovvero gli autovettori sono ortogonali. $\square$

Proviamo ora una importante caratterizzazione dell'autoaggiuntezza in termini di matrici. Ancora una volta le basi ortonormali giocano un ruolo centrale. Ricordiamo dalla definizione 1.15 del Cap. V che una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice simmetrica se coincide con la sua trasposta ${}^tA = A$, ovvero se per ogni $i, j$, gli elementi $a_{ij}$ e $a_{ji}$ coincidono.

**2.3. Teorema.** *Siano $\phi \in End(E^n)$ e $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $E^n$. Allora*

$$\phi \text{ è autoaggiunto} \iff M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \text{ è simmetrica.}$$

Dimostrazione. Sia ponga $A = (a_{ij}) := M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e si denotino come al solito con $X$ e $Y$ le colonne delle componenti rispetto a $\mathcal{B}$ di $v$ e $w$, rispettivamente, dove $v, w \in E^n$.
Dapprima osserviamo che, applicando opportunamente 1.9, si hanno le uguaglianze

$$\phi(v) \cdot w = {}^t(AX)Y = ({}^tX\,{}^tA)Y = {}^tX\,{}^tAY \qquad \text{e} \qquad v \cdot \phi(w) = {}^tX(AY) = {}^tXAY.$$

"$\Leftarrow$" Se $A$ è simmetrica, allora $\phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w)$, per ogni $v, w \in E^n$. Quindi $\phi$ è autoaggiunto.
"$\Rightarrow$" Viceversa, sia $\phi$ autoaggiunto; allora

$${}^tX\,{}^tAY = {}^tXAY$$

comunque scelti $X, Y$ in $\mathbb{R}^n$. Allora si facciano variare nella base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, se $X = {}^te_1$ e $Y = {}^te_2$, allora ${}^tX\,{}^tAY = a_{21}$ e ${}^tXAY = a_{12}$; quindi $a_{21} = a_{12}$. Analogamente si prova che, per ogni $i, j$, gli elementi $a_{ij}$ e $a_{ji}$ coincidono, cioè $A$ è simmetrica. $\square$

**2.3.1. Esempio.** La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
è simmetrica; dunque l'endomorfismo $\phi$ di $E^2$ associato ad $A$ rispetto alla base canonica è autoaggiunto. Si può anche verificarlo direttamente: poiché $\phi((x,y)) = (2x-y, -x+3y)$, si ha
$$\begin{aligned}(a,b)\cdot\phi((x,y)) &= a(2x-y)+b(-x+3y) = \\ &= (2a-b)x+(-a+3b)y = \phi((a,b))\cdot(x,y).\end{aligned}$$
Invece la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
non è simmetrica; infatti $\phi$ non è autoaggiunto in quanto
$$\phi(e_1)\cdot e_2 = (1,-1)\cdot(0,1) = -1 \quad \text{mentre} \quad e_1\cdot\phi(e_2) = (1,0)\cdot(1,0) = 1.$$

Enunciamo ora il teorema fondamentale relativo alle matrici simmetriche reali:

**2.4. Teorema.** *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica; allora il suo polinomio caratteristico ha solo radici reali.*

Dimostrazione. Sia $\lambda$ una radice del polinomio caratteristico di $A$. Poiché $\lambda$ potrebbe non essere reale, dobbiamo interpretare $A$ come matrice associata ad un endomorfismo di $\mathbb{C}^n$; quindi sia
$$\phi:\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
definito da $M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = A$. Sia $v \in \mathbb{C}^n$ un corrispondente autovettore non nullo, cioè $\phi(v) = \lambda v$. Se denotiamo come al solito con $X$ la matrice colonna delle componenti di $v$, possiamo scrivere tale condizione in termini di matrici. Più precisamente, se $v = (x_1, \dots, x_n)$, allora
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{e vale} \qquad AX = \lambda X.$$
Prendendo i complessi coniugati dell'espressione precedente e tenendo conto che $\overline{A} = A$ poiché $A$ è reale, si ha
$$A\overline{X} = \bar{\lambda}\overline{X}, \qquad \text{dove} \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}.$$
Consideriamo ora lo scalare ${}^t\overline{X}AX$: utilizzando le due uguaglianze precedenti, potrà essere corrispondentemente scritto in due modi differenti:
$${}^t\overline{X}AX = \ {}^t\overline{X}(AX) = {}^t\overline{X}(\lambda X) = \lambda\,({}^t\overline{X}X)$$

$${}^t\overline{X}AX = \ ({}^t\overline{X}A)X = {}^t(A\overline{X})X = {}^t(\bar{\lambda}\overline{X})X = \bar{\lambda}\,({}^t\overline{X}X)$$
da cui, eguagliando,
$$(\lambda - \bar{\lambda})\,({}^t\overline{X}X) = 0.$$
D'altra parte, ${}^t\overline{X}X = \overline{x}_1x_1 + \overline{x}_2x_2 + \cdots + \overline{x}_nx_n$ è un numero reale positivo in quanto $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$. Pertanto $\lambda = \bar{\lambda}$, dunque $\lambda$ è reale. $\square$

**2.4.1. Esempio.** Il seguente esempio ha un triplice scopo:
- fornisce una dimostrazione "ad hoc" del teorema 2.4 nel caso di matrici $2 \times 2$;
- verifica in modo diretto la proposizione 2.2 (ancora nel caso $n = 2$);
- mostra che un endomorfismo autoaggiunto di $E^2$ determina una base ortonormale di $E^2$ costituita da autovettori. Quest'ultimo fatto risulterà utile nella dimostrazione di 2.6.

Si consideri dunque la generica matrice simmetrica di $\mathbb{R}^{2,2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sia $p_A(T) = \det(A - TI)$ il suo polinomio caratteristico; dunque

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{vmatrix} = T^2 - (a_{11} + a_{22})T + a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \qquad (*)$$

Quindi il discriminante di $p_A(T)$ è dato da

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

in quanto somma di due quadrati. Quindi le radici $\lambda_1, \lambda_2$ di $p_A(T)$ sono reali.

Dimostriamo infine che $A$ è diagonalizzabile con una matrice ortogonale $P$. A tale scopo consideriamo l'endomorfismo $\phi$ di $E^2$ associato ad $A$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Poiché $A = M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, possiamo considerare gli autospazi di $\phi$ associati a $\lambda_1$ e $\lambda_2$.

Se $\Delta = 0$, allora $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$, cioè la matrice $A$ è già diagonale e quindi è diagonalizzabile con la matrice ortogonale $P = I_2$. C'è un solo autovalore $\lambda_1 = a_{11} = a_{22}$, di molteplicità 2, e il corrispondente autospazio è $V_{\lambda_1} = E^2$.
Se $\Delta > 0$, allora le radici $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hanno corrispondenti autospazi (entrambi di dimensione uno) $V_{\lambda_1}$ e $V_{\lambda_2}$. Da 2.2 segue che due loro vettori non nulli $v_i \in V_{\lambda_i} = 1$, $i = 1, 2$, sono ortogonali. Quindi la matrice diagonalizzante $P$, le cui colonne sono gli autovettori normalizzati

$$\frac{v_1}{\| v_1 \|}, \quad \frac{v_2}{\| v_2 \|},$$

è ortogonale per costruzione. Osserviamo che la matrice ortogonale $P$ può essere scelta speciale, semplicemente scambiando l'ordine di $\lambda_1$ e $\lambda_2$ e dunque di $v_1$ e $v_2$.

Nella pratica, per determinare la matrice ortogonale $P$ (o equivalentemente una base ortonormale di $E^2$ costituita da autovettori), si procede come segue. Si osserva dapprima che ogni autospazio $V_{\lambda_i}$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$A - \lambda_i I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Poiché, come detto sopra, $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$, il sistema precedente equivale ad una sola equazione: ad esempio, $V_{\lambda_i} = \{(x, y) \,|\, (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0\} = \mathcal{L}((-a_{12}, a_{11} - \lambda_i)) = \mathcal{L}(v_i)$, con $i = 1, 2$, dove si sono posti $v_1 := (-a_{12}, a_{11} - \lambda_1)$ e $v_2 := (-a_{12}, a_{11} - \lambda_2)$.
Si può mostrare esplicitamente che $v_1$ e $v_2$ sono ortogonali. Infatti il loro prodotto scalare è

$$v_1 \cdot v_2 = a_{12}^2 + a_{11}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a_{11} + \lambda_1\lambda_2.$$

D'altra parte, dall'espressione $(*)$ di $p_A(T)$ segue che $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ e $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Sostituendo nella precedente uguaglianza si ottiene $v_1 \cdot v_2 = 0$.

**2.4.2. Esempio.** Consideriamo la matrice simmetrica dell'esempio 2.3.1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico $p_A(T) = \det(A - TI)$ è esplicitamente calcolato essere

$$p_A(T) = T^2 - 5T + 5$$

e quindi le sue radici sono chiaramente reali: $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$.
I corrispondenti autospazi $V_\pm$ sono dati dalle soluzioni dei sistemi omogeneo associati alle matrici

$$A - \lambda_\pm I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{5}) & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Come prima, $\dim(V_\pm) = 1$, e quindi questo sistema equivale ad una sola equazione: ad esempio, $V_\pm = \mathcal{L}((-2, 1 \pm \sqrt{5}) = \mathcal{L}(v_\pm)$. Qui $v_+ := (-2, 1 + \sqrt{5})$ e $v_- := (-2, 1 - \sqrt{5})$. Esplicitamente,

$$v_+ \cdot v_- = 4 - 4 = 0$$

ovvero gli autospazi sono ortogonali.
E' infine chiaro che i vettori

$$u_1 := \frac{v_+}{\| v_+ \|}, \quad u_2 := \frac{v_-}{\| v_- \|}$$

costituiscono una base ortonormale di autovettori.

Possiamo ora enunciare il teorema fondamentale del capitolo (noto anche come *Teorema spettrale*) nelle sue due formulazioni: per endomorfismi autoaggiunti (2.6) e per matrici simmetriche (2.7). Per fare questo, abbiamo bisogno di un'avvertenza e di una definizione.

**Nota.** Finora abbiamo studiato endomorfismi dello spazio vettoriale euclideo $E^n$. Tutta la teoria può essere naturalmente formulata per un qualunque $\mathbb{R}$–spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, nozione introdotta nel Cap. IV, di cui lo spazio $E^n$ è un caso particolare. Anche nell'ambito più generale valgono le stesse definizioni e gli stessi risultati. Ne avremo bisogno per il teorema 2.6.

**2.5. Definizione.** Sia $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale e sia $\widetilde{V} \subset V$ un suo sottospazio vettoriale. Se l'immagine di $\widetilde{V}$ tramite $\phi$ è contenuta in $\widetilde{V}$ (in simboli: $\phi(\widetilde{V}) \subseteq \widetilde{V}$), allora è definito l'endomorfismo (in quanto è un'applicazione ovviamente lineare)

$$\phi_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V} \quad \text{data da} \quad \phi_{\widetilde{V}}(v) := \phi(v), \quad \forall\, v \in \widetilde{V}.$$

In altre parole, $\phi_{\widetilde{V}}$ ha la stessa legge di $\phi$, ma diverso dominio e codominio. Tale endomorfismo di $\widetilde{V}$ si dice *restrizione* di $\phi$ a $\widetilde{V}$.

**2.6. Teorema spettrale (per endomorfismi).** *Se $(V, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e $\phi \in End(V)$ allora*

$$\phi \text{ è autoaggiunto} \iff \text{esiste una base ortonormale di } V \text{ costituita da autovettori.}$$

Dimostrazione. " $\Leftarrow$ " Sia $\mathcal{C}$ una base ortonormale di autovettori; allora $M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ è diagonale e in particolare è simmetrica. Quindi $\phi$ è autoaggiunto per 2.3.

" $\Rightarrow$ " Proviamo questa implicazione per induzione su $n = \dim(V)$.
Se $n = 2$ il risultato è nell'esempio 2.4.1.
Supponiamo ora di sapere che l'implicazione vale per ogni spazio vettoriale con prodotto scalare avente dimensione $n-1$ e proviamola per $(V, \cdot)$ di dimensione $n$.

Sia dunque $\phi$ un endomorfismo autoaggiunto di $V$. Se $\mathcal{B}$ è una qualunque base ortonormale di $V$ (che esiste per 1.22, Cap. IV), allora, per 2.3, $A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è simmetrica; pertanto il polinomio caratteristico di $A$ ha solo radici reali per 2.4. Sia $\lambda$ un tale autovalore di $\phi$ e $v_1$ un corrispondente autovettore che possiamo supporre di norma uno.

Consideriamo il sottospazio ortogonale della retta vettoriale generata da $v_1$, cioè $\widetilde{V} := (\mathcal{L}(v_1))^\perp$.
Per poter definire la restrizione di $\phi$ a $\widetilde{V}$ (secondo 2.5) dobbiamo verificare che $\phi(\widetilde{V}) \subseteq \widetilde{V}$ cioè che per ogni $v \in \widetilde{V}$ si abbia $\phi(v) \in \widetilde{V}$.
Tenendo conto che $\widetilde{V} := (\mathcal{L}(v_1))^\perp$, si tratta di provare che $v \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \phi(v) \cdot v_1 = 0$; ma questo segue dall'ipotesi che $\phi$ sia autoaggiunto e che $v_1$ sia un autovettore associato a $\lambda$: infatti

$$\phi(v) \cdot v_1 = v \cdot \phi(v_1) = v \cdot (\lambda v_1) = \lambda\,(v \cdot v_1) = 0.$$

Quindi $\phi$ si restringe ad un endomorfismo $\phi_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$, che ovviamente è ancora autoaggiunto. Inoltre $\dim(\widetilde{V}) = n-1$, dunque ad esso si può applicare l'ipotesi induttiva: esistono $n-1$ vettori $(v_2, \ldots, v_n)$ che sono una base ortonormale di $\widetilde{V}$ e sono autovettori di $\phi_{\widetilde{V}}$.

Poiché $\phi_{\widetilde{V}}$ è definita come $\phi$, è evidente che $(v_2, \ldots, v_n)$ sono anche autovettori di $\phi$; inoltre sono ortogonali a $v_1$ in quanto appartengono a $\widetilde{V}$. Abbiamo quindi provato che i vettori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sono un insieme ortonormale costituito da autovettori di $\phi$. Infine, essendo in numero di $n = \dim(V)$, costituiscono una base di $V$ e ciò prova la tesi. $\square$

**2.7. Teorema spettrale (per matrici).** *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica; allora esiste una matrice ortogonale $P$ tale che ${}^tPAP$ è diagonale, ovvero le matrici simmetriche sono diagonalizzabili mediante matrici ortogonali.*

Dimostrazione. Consideriamo l'endomorfismo $\phi = f_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}} : E^n \longrightarrow E^n$, che è autoaggiunto per 2.3, essendo $A$ simmetrica ed $\mathcal{E}$ base ortonormale. Per 2.6 esiste una base ortonormale $\mathcal{C}$ di $E^n$ costituita da autovettori e quindi $M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ è diagonale. Inoltre, per 8.6, Cap. VII:

$$M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}.$$

Poiché $M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = A$, posta $P := M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ si ha che $P^{-1}AP$ è diagonale. Ma la matrice $P$ ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{C}$ che è una base ortonormale, dunque è una matrice ortogonale. $\square$

**2.8. Osservazione.** Nella dimostrazione precedente, la matrice ortogonale $P$ può essere scelta speciale, semplicemente scambiando tra loro due qualsiasi delle sue colonne.

**2.8.1. Esempio.** Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^4)$ definito da $\phi((x, y, z, t)) = (x + y, x + y, -z + t, z - t)$.
La matrice associata a $\phi$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è chiaramente:

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo tale matrice simmetrica (rispetto a una base ortonormale) da 2.3 l'endomorfismo $\phi$ è autoaggiunto. Posta $A$ tale matrice, il polinomio caratteristico di $\phi$ è

$$p_\phi(T) = p_A(T) = |A - TI_4| = \begin{vmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & 1-T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-T & 1 \\ 1 & -1-T \end{vmatrix} = T^2(T-2)(T+2).$$

Quindi gli autovalori di $\phi$ sono 0 (con molteplicità 2), $-2, 2$. Si calcolano gli autospazi relativi:

$$V_0 = \ker(\phi) = \mathcal{L}((1,-1,0,0),(0,0,1,1)),$$
$$V_{-2} = \ker(\phi - 2I_4) = \mathcal{L}((1,1,0,0)), \qquad V_2 = \ker(\phi - I_4) = \mathcal{L}((0,0,1,-1)).$$

Come deve essere, i tre autospazi sono mutuamente ortogonali. Inoltre, i due vettori base di $V_0$ sono tra loro ortogonali. Per trovare la matrice ortogonale $P$ che diagonalizza $A$ è quindi necessario solamente normalizzare i quattro autovettori base arrivando a quattro colonne ortonormali. Ordinando le colonne in modo da avere $\det(P) = 1$, esplicitamente:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.9. Corollario.** *Sia $\phi \in End(E^n)$; se $\phi$ è autoaggiunto allora $\phi$ è semplice.*

Dimostrazione. Immediata: per 2.6, se $\phi$ è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di $E^n$ costituita da autovettori. Si conclude con 1.10, $b$), Cap. VIII. □

Non vale il viceversa di 2.9:

**2.9.1. Esempio.** Si consideri l'endomorfismo $\phi$ di $E^2$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si verifica facilmente che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$; dunque $\phi$ è semplice per 3.2, Cap. VIII. D'altra parte $\phi$ non è autoaggiunto in quanto

$$\phi(e_1) \cdot e_2 = (1,0) \cdot (0,1) = 0 \quad \text{mentre} \quad e_1 \cdot \phi(e_2) = (1,0) \cdot (1,-1) = 1.$$

Se calcoliamo esplicitamente gli autospazi di $\phi$, otteniamo che $V_1 = \mathcal{L}((1,0))$ e $V_{-1} = \mathcal{L}((1,-2))$ e tali sottospazi non sono ortogonali. Detto altrimenti, la matrice diagonalizzante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

non è ortogonale, nè se ne può trovare una ortogonale.

Quanto accade nell'esempio precedente è una proprietà generale che caratterizza gli endomorfismi autoaggiunti all'interno degli endomorfismi semplici, come mostra il seguente risultato.

**2.10. Teorema.** *Siano $\phi$ un endomorfismo semplice di $E^n$ e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_s}$ i suoi autospazi. Allora:*

$$\phi \text{ è autoaggiunto} \iff V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j} \text{ per ogni } i \neq j.$$

Dimostrazione. " $\Rightarrow$ " Immediato, da 2.2.
" $\Leftarrow$ " Viceversa, poiché $\phi$ è semplice, $E^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. Basta allora considerare delle basi ortonormali per ogni autospazio (che esistono per Gram–Schmidt): l'unione di tali basi è una base ortonormale di $E^n$, ovviamente costituita da autovettori. Si conclude con 2.6. □

Diamo ora due esempi di costruzione di applicazioni lineari e un esercizio di ricapitolazione.

**2.10.1. Esercizio.** Si costruisca un endomorfismo autoaggiunto $f: E^3 \to E^3$ con le seguenti proprietà: $\ker(f) = \mathcal{L}((1,2,1))$ e $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ siano autovalori di $f$.

Poiché $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$, allora $\lambda_3 = 0$ è il terzo autovalore di $f$ e $\ker(f) = V_0$. Poiché $f$ è un endomorfismo di $E^3$ ed abbiamo già tre autovalori distinti, si ha che $f$ è semplice e $E^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_0$. Inoltre, affinché $f$ sia autoaggiunto, basta che $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}, \quad \forall\, i \neq j$. In particolare,

$$(\ker(f))^\perp = (V_0)^\perp = V_1 \oplus V_2.$$

Si determina quindi

$$(\ker(f))^\perp = (\mathcal{L}((1,2,1))^\perp = \{(\alpha, \beta, -\alpha - 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(a,b,c))$$

dove $(a,b,c)$ è utile che sia un vettore appartenente a $\mathcal{L}((1,2,1))^\perp$ e ortogonale a $(1,0,-1)$. Imponendo $(1,2,1)\cdot(a,b,c) = 0$ e $(1,0,-1)\cdot(a,b,c) = 0$ si ottiene il vettore $(1,-1,1)$.
Quindi, ad esempio, si possono scegliere $V_1 = \mathcal{L}((1,0,-1))$ e $V_2 = \mathcal{L}((1,-1,1))$.
In tal modo $f$ è semplice e i suoi 3 autospazi sono a due a due ortogonali, quindi è autoaggiunto. Per esprimere tale $f$ in termini di matrici, si può scegliere l'insieme di autovettori $\mathcal{B} := ((1,0,-1),(1,-1,1),(1,2,1))$ che è, per costruzione, una base di $E^3$ e si ha

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.10.2. Esercizio.** Si costruisca una applicazione lineare $f: E^3 \to E^3$ che abbia le proprietà: $\ker(f) = \mathcal{L}((1,-1,1))$, $\mathrm{Im}(f) = (\ker(f))^\perp$ e che sia semplice, ma non autoaggiunto.

Affinché $f$ sia semplice, dovrà avere altri due autovalori $\lambda_2$ e $\lambda_3$ (oltre a $\lambda_1 = 0$, che deve avere molteplicità 1 in quanto $f$ è semplice e $\dim(V_0) = 1$). Ci sono due possibilità: o $\lambda_2 = \lambda_3$ o $\lambda_2 \neq \lambda_3$.
Nel primo caso, $V_{\lambda_2} = \mathrm{Im}(f) = (\ker(f))^\perp = (V_{\lambda_1})^\perp$. Pertanto gli unici due autospazi sono tra loro ortogonali e quindi $f$ è autoaggiunto, contrariamente alla richiesta iniziale.
Quindi deve essere $\lambda_2 \neq \lambda_3$. In tal caso $V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} = \mathrm{Im}(f)$ e chiaramente $V_{\lambda_i} \perp V_0$, per $i = 2,3$.
Affinché $f$ sia semplice, ma non autoaggiunto, basterà scegliere come $V_{\lambda_2}$ e $V_{\lambda_3}$ due sottospazi di $\mathrm{Im}(f)$ tra loro non ortogonali. Ad esempio, poiché

$$\mathrm{Im}(f) = (\mathcal{L}((1,-1,1)))^\perp = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\} = \mathcal{L}((1,1,0),(0,1,1))$$

scegliamo

$$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,0)), \quad V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((0,1,1)).$$

Infine, posta $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,1,0),(0,1,1))$, si ha:

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

**2.10.3. Esercizio.** Si consideri l'endomorfismo $\phi : E^3 \longrightarrow E^3$ la cui matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,-1))$ è

$$M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Posta $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{E}^3$, determinare:

1) una base ortonormale $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^3$ costituita da autovettori di $\phi$;
2) la matrice ortogonale $M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$;
3) la matrice $M^{\mathcal{E},\mathcal{C}}$;
4) la matrice $M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$;
5) gli autovalori di $\phi$, con relative molteplicità.

1) Si osservi che la base $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori, in quanto la matrice $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è diagonale. Infatti, denotando brevemente con $v_1, v_2, v_3$ i vettori di $\mathcal{B}$, la matrice suddetta esprime il fatto che $\phi(v_1) = v_1$, $\phi(v_2) = 2v_2$, $\phi(v_3) = 3v_3$. Inoltre $\mathcal{B}$ è ortogonale ma non ortonormale. Dunque $\mathcal{B}$ non è la risposta corretta. Basta tuttavia una piccola modifica. Se si considerano i vettori $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|}$, $u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|}$, si osserva che essi sono ancora una base di $\mathbb{E}^3$ e sono autovettori (in quanto multipli di autovettori). Costituiscono un insieme ortogonale perché anche $\mathcal{B}$ è ortogonale e infine hanno norma 1 per costruzione. Dunque $\mathcal{C} := (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,-1))$ è la base richiesta.
*(Si noti che l'esistenza di tale base $\mathcal{C}$ implica che $\phi$ è autoaggiunto; ciò non si poteva dedurre dalle informazioni del testo, in quanto la matrice $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è simmetrica ma $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, come osservato prima.)*

2) Per definizione di matrice di cambio base, $M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{E}$. Dunque
$$M^{\mathcal{C},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) In generale, $M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} = \left(M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}\right)^{-1}$. Ma in questo caso, essendo tale matrice ortogonale, si ha:

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} = {}^t\left(M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Dal teorema di cambio base per le matrici associate ad applicazioni lineari, si ottiene:

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = M^{\mathcal{C},\mathcal{E}} M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} M^{\mathcal{E},\mathcal{C}}.$$

Si osservi infine che $M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dunque il calcolo di $M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è il semplice prodotto di 3 matrici note.

5) Si deduce subito da $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che gli autovalori di $\phi$ sono $1,2,3$, tutti di molteplicità 1.