Capitolo VIII
DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI

1. Endomorfismi semplici, autovettori

1.1. Definizione. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Un'applicazione lineare $\phi : V \longrightarrow V$ si dice *endomorfismo* di V; l'insieme di tutti gli endomorfismi di V si indica con $End(V)$.

Si può mostrare che $End(V)$ è a sua volta un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma $(\phi_1 + \phi_2)$ e di prodotto per uno scalare $(\lambda\phi)$, per ogni $\phi_1, \phi_2, \phi \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definite 'puntualmente', ovvero

$$(\phi_1 + \phi_2)(v) := \phi_1(v) + \phi_2(v)$$
$$(\lambda\phi)(v) := \lambda\phi(v)$$

per ogni $v \in V$. Inoltre, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, la corrispondenza biunivoca

$$End(V) \longrightarrow \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{definita da} \quad \phi \mapsto M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}},$$

è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, ovvero

$$M_{\phi_1+\phi_2}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{\phi_1}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} + M_{\phi_2}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad M_{\lambda\phi}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \lambda M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}. \tag{$*$}$$

Di conseguenza, se $\dim V = n$, allora $End(V)$ ha dimensione n^2.

È naturale chiedersi se esistano basi per le quali una matrice del tipo $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ ha una forma "semplice", ad esempio diagonale. A tale scopo introduciamo la seguente nozione:

1.2. Definizione. Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dicono *simili*, e si denota $A \sim B$, se esiste un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V e un endomorfismo $\phi \in End(V)$ a cui le matrici sono associate, ovvero esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V tali che $A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $B = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

Si può caratterizzare la similitudine di due matrici in maniera puramente algebrica:

1.3. Proposizione. *Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono simili se e solo se esiste una matrice $P \in GL(n)$ tale che $P^{-1}AP = B$.*

Dimostrazione. Supponiamo $A \sim B$; allora esistono un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V e un endomorfismo $\phi \in End(V)$ tali che $A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $B = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$. Da 8.6, Cap. VII, si ha pertanto che $B = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} A M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$. Ma $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, matrice del cambio base, è invertibile e $(M^{\mathcal{C},\mathcal{B}})^{-1} = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Si conclude ponendo $P = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.
Viceversa, supponiamo che esista $P \in GL(n)$ tale che $P^{-1}AP = B$. Poiché si può interpretare una matrice invertibile P come matrice di un opportuno cambio di base di $\mathbb{R}^n$ (vedi 8.4 e 8.5, Cap. VII), esiste una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $P = M^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ e quindi $P^{-1} = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}}$. Sia quindi $\phi = f_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, da cui $A = M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$. Pertanto

$$B = P^{-1}AP = M^{\mathcal{E},\mathcal{C}} M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} M^{\mathcal{C},\mathcal{E}} = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}.$$

Quindi anche B è associata allo stesso endomorfismo ϕ; pertanto A e B sono simili. □

1.4. Osservazione. La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{R}^{n,n}$. Infatti è:

a) riflessiva, cioè $A \sim A$ in quanto $A = I_n A I_n$;

b) simmetrica, cioè $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, in quanto $P^{-1}AP = B \Rightarrow PBP^{-1} = A$;

c) transitiva, in quanto $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (infatti $P^{-1}AP = B$, $Q^{-1}BQ = C \Rightarrow Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) = C$).

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, indichiamo con $[A] = \{B \in \mathbb{R}^{n,n} \mid B \sim A\}$ la sua classe di equivalenza. Ci chiediamo se in $[A]$ esiste una matrice diagonale o, in altri termini, quando una matrice A è simile ad una matrice diagonale.

1.5. Definizione. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste $\Delta \in [A]$ con Δ matrice diagonale.

La corrispondente nozione per gli endomorfismi è la seguente:

1.6. Definizione. L'endomorfismo $\phi \in End(V)$ si dice *semplice* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è diagonalizzabile.

L'essere semplice è una proprietà intrinseca dell'endomorfismo e quindi non dipende dalla base rispetto alla quale si esprime la matrice associata. Infatti, vale la seguente:

1.7. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; sono fatti equivalenti:*

i) esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è diagonalizzabile (cioè ϕ è semplice);

ii) esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ è diagonale;

iii) per ogni base $\mathcal{D}$ di V la matrice $M_\phi^{\mathcal{D},\mathcal{D}}$ è diagonalizzabile.

<u>Dimostrazione</u>.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Per ipotesi $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è simile ad una matrice diagonale Δ, cioè $\Delta = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ per un'opportuna base $\mathcal{C}$ di V.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sia $\mathcal{C}$ una base di V tale che $M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \Delta$ sia diagonale. Allora, per ogni base $\mathcal{D}$, si ha che $M_\phi^{\mathcal{D},\mathcal{D}} \sim \Delta$, cioè $M_\phi^{\mathcal{D},\mathcal{D}}$ è diagonalizzabile.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Ovvio. $\square$

1.8. Osservazione. Sia $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo semplice e sia $\Delta = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ una matrice diagonale associata a ϕ cioè

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Allora, se $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$, si ha $\phi(v_i) = \lambda_i v_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

I vettori della base $\mathcal{C}$ e gli scalari λ_i giocano un ruolo centrale nella teoria che stiamo sviluppando. Diamo quindi la seguente

1.9. Definizione. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; se $v \in V$ è un vettore non nullo e se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(v) = \lambda v,$$

allora λ si dice *autovalore* di ϕ e v si dice *autovettore* di ϕ associato a λ.

1.10. Osservazione. *a*) Con la terminologia ora introdotta, 1.8 si riformula nel seguente modo: sia $\phi \in End(V)$ e sia $\mathcal{C}$ una base di V; allora

$$M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} \text{ è diagonale} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{C} \text{ è una base costituita da autovettori.}$$

b) Inoltre, tenuto conto di 1.6, si ha

$$\phi \text{ è semplice} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{esiste una base di } V \text{ costituita da autovettori.}$$

Si osservi che, se v è un autovettore, allora ad esso è associato un preciso autovalore λ, mentre non vale il viceversa. Infatti ad un autovalore λ corrispondono infiniti vettori: se v è un autovettore associato a λ anche αv è un autovettore associato allo stesso λ, in quanto $\phi(\alpha v) = \alpha\phi(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$. Più in generale si ha la seguente:

1.11. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\phi \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora l'insieme*

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Come al solito si prova che V_λ è chiuso per combinazioni lineari. Siano allora v_1 e v_2 due elementi in V_λ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Poichè ϕ è un'applicazione lineare, dalle proprietà chiamate L_1 e L_2 nella definizione 1.2, Cap. VII, si ha che:

$$\phi(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\phi(v_1) + a_2\phi(v_2) = a_1\lambda v_1 + a_2\lambda v_2 = \lambda(a_1v_1 + a_2v_2)$$

da cui si conclude che $a_1v_1 + a_2v_2 \in V_\lambda$. □

1.12. Osservazione. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ non è un autovalore, l'insieme $V_\lambda = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$ è costituito dal solo vettore nullo e viceversa. In breve, se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora:

$$\lambda \quad \text{autovalore} \quad \Longleftrightarrow \quad V_\lambda \neq \{0_V\} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(V_\lambda) \geq 1.$$

1.12.1. Esempio. Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorfismo definito da $\phi((x, y)) = (y, x)$.
Supponiamo che si sia trovato che 2 è un autovalore. Ci si può immediatamente accorgere dello sbaglio determinando V_2, infatti:

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(v) = 2v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x) = 2(x, y)\}.$$

Quindi V_2 è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

cioè $V_2 = \{(0, 0)\}$. Pertanto, per 1.12, 2 non è un autovalore di ϕ.

1.13. Definizione. Se $\phi \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di ϕ, allora V_λ si dice *autospazio* associato all'autovalore λ.

1.13.1. Esempio. L'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^2$ definito da $\phi((x, y)) = (2x, 3y)$ è semplice in quanto la matrice associata rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonale. Inoltre gli autovalori di ϕ sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ con autovettori, rispettivamente, e_1 ed e_2. Si osservi infine che gli autospazi sono:

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi((x, y)) = 2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

cioè $V_2 = \mathcal{L}(e_1)$. Analogamente si trova $V_3 = \mathcal{L}(e_2)$.

1.13.2. Esempio. Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorfismo dell'esempio 1.12.1 definito da $\phi((x, y)) = (y, x)$; ci chiediamo se ϕ è semplice. La matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica è

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che, contrariamente all'esempio precedente, non è diagonale. Cerchiamo quindi una base, se esiste, rispetto alla quale la matrice associata lo sia. Per 1.10, è sufficiente che tale base sia costituita da autovettori. Pertanto cerchiamo gli autospazi di ϕ.
Affinché $v = (a, b)$ sia un autovettore, deve essere $\phi((a, b)) = \lambda(a, b)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$; cioè deve esistere un λ tale che

$$\begin{cases} b & = & \lambda a \\ a & = & \lambda b \end{cases}.$$

Segue che $\lambda^2 = 1$ ovvero gli autovalori sono $\lambda = \pm 1$. I corrispondenti autospazi sono:

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi((x, y)) = (x, y)\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\} = \mathcal{L}((1, 1))$$
$$V_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi((x, y)) = -(x, y)\} = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2\} = \mathcal{L}((1, -1)).$$

I due vettori $(1, 1), (1, -1)$ sono chiaramente linearmente indipendenti e costituiscono la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ rispetto a cui la matrice associata a ϕ è diagonale:

$$M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto ϕ è semplice. Osserviamo inoltre che $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ sono simili, in quanto associate allo stesso endomorfismo di $\mathbb{R}^2$. Per verificarlo algebricamente, sia

$$P = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambio base. Un calcolo diretto mostra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ovvero $P^{-1} M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} P = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, come da proposizione 1.3.

Non tutti gli endomorfismi sono semplici come mostra il seguente esempio.

1.13.3. Esempio. L'endomorfismo $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$ definito da $\phi((x,y)) = (-y,x)$ non è semplice. Infatti se $v = (a,b)$ fosse un autovettore, $\phi((a,b)) = \lambda(a,b)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, si avrebbe $(-b,a) = \lambda(a,b)$. Ma il sistema

$$\begin{cases} -b &= \lambda a \\ a &= \lambda b \end{cases}$$

richiederebbe $\lambda^2 = -1$; quindi ha solo la soluzione nulla $a = b = 0$ e ϕ non ha autovettori.

1.14. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono autovalori distinti e $0_V \neq v_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1,2$, allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Inoltre la somma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ è diretta.*

Dimostrazione. Sia, per assurdo

$$v_2 = \alpha v_1, \tag{$*$}$$

con α scalare non nullo. Applicando ϕ ad ambo i membri, e usando la sua linearità si ottiene

$$\phi(v_2) = \alpha\phi(v_1). \tag{$**$}$$

Per ipotesi v_1 e v_2 sono autovettori di autovalori λ_1 e λ_2, rispettivamente, cioè

$$\phi(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \text{e} \quad \phi(v_2) = \lambda_2 v_2.$$

Sostituendo tali espressioni in $(**)$ segue che

$$\lambda_2 v_2 = \alpha(\lambda_1 v_1) = \lambda_1(\alpha v_1) = \lambda_1 v_2$$

usando $(*)$ per l'ultima eguaglianza. Quindi:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0_V.$$

Essendo $\lambda_2 \neq \lambda_1$ per ipotesi, ne segue che $v_2 = 0_V$: assurdo. Pertanto v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.
Per provare l'ultima affermazione, basta mostrare (per 2.9, Cap. III) che $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$. Sia $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$. Allora $\phi(v) = \lambda_1 v$, in quanto $v \in V_{\lambda_1}$, e anche $\phi(v) = \lambda_2 v$, in quanto $v \in V_{\lambda_2}$. Dunque si avrebbe $\lambda_1 v = \lambda_2 v$, da cui $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V$. Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ per ipotesi, ne segue che $v = 0_V$. $\square$

Iterando la dimostrazione si mostra la seguente:

1.15. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ autovalori distinti di ϕ e $0_V \neq v_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, s$, corrispondenti autovettori. Allora $\{v_1, \dots, v_s\}$ è un insieme libero di vettori e la somma $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ è diretta.* $\square$

1.16. Corollario. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\phi \in End(V)$; allora ϕ ha al più n autovalori distinti.*

Dimostrazione. Se ϕ avesse s autovalori distinti, con $s > n$, allora esisterebbero $v_1, \dots, v_s$ autovettori non nulli associati rispettivamente ad ognuno di essi. Per 1.15 tali vettori sarebbero linearmente indipendenti, ma ciò è impossibile, poichè $\dim(V) = n$. $\square$

2. Polinomio caratteristico e calcolo degli autospazi

Lo scopo di questo paragrafo è il calcolo degli autovalori e dei correspondenti autospazi di un endomorfismo. Dapprima è bene ricordare il seguente fatto (vedi 5.1 *i*), Cap. VII).
Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e sia $A := M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Posto $\Sigma : AX = 0$ il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A, allora l'applicazione

$$\ker(f) \longrightarrow S_\Sigma \quad \text{definita da} \quad (x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B} \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

2.1. Lemma. *Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\phi \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora*

$$V_\lambda = \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_V) \cong S_\Sigma$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V e S_Σ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\Sigma : \left(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n\right) X = 0.$$

Dimostrazione. Per definizione (vedi 1.11) $V_\lambda = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid \phi(v) - \lambda v = 0_V\} = \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ e tale nucleo è isomorfo (come ricordato sopra) allo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $M_{\phi-\lambda \mathrm{id}_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V.
Si concluda osservando che $M_{\phi-\lambda \mathrm{id}_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n$ (vedi $(*)$ all'inizio del capitolo). □

2.2. Proposizione. *Siano V un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale di dimensione n, $\phi \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. I seguenti fatti sono equivalenti:*

i) $\lambda \in \mathbb{R}$ *è un autovalore di* ϕ *;*

ii) $\dim(V_\lambda) \geq 1$ *;*

iii) $\det(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n) = 0$, *per ogni base $\mathcal{B}$ di V.*

Dimostrazione. *i)* ⇔ *ii)* Vedi Osservazione 1.12.
ii) ⇔ *iii)* Sia $\mathcal{B}$ una qualunque base di V e $\Sigma : \left(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n\right) X = 0$. Allora

$$\dim(V_\lambda) = \dim(S_\Sigma) = n - \mathrm{rk}\left(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n\right)$$

dove la prima uguaglianza segue da 2.1 e la seconda da 4.3, Cap. VI. Si conclude osservando che

$$\dim(V_\lambda) \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rk}\left(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n\right) < n \;\Leftrightarrow\; \det\left(M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - \lambda I_n\right) = 0,$$

usando 6.6 Cap V. □

La proposizione precedente mostra anche come per il calcolo degli autospazi si possa usare il metodo per il calcolo del nucleo descritto in 5.1, Cap. VII.

2.3. Osservazione - Definizione. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata; allora la quantità $p_A(T) = \det(A - TI_n)$ è un polinomio di grado n nella variabile T a coefficienti in $\mathbb{R}$ detto *polinomio caratteristico* della matrice A.

2.4. Esempio. Se $n = 2$ si ha

$$p_A(T) = T^2 - (a_{11} + a_{22})T + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

D'altra parte, dette λ_1 e λ_2 le radici di $p_A(T)$, l'espressione di un'equazione di secondo grado in funzione della somma e del prodotto delle sue radici è

$$p_A(T) = T^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)T + \lambda_1\lambda_2,$$

dunque

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(A), \qquad \lambda_1\lambda_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det(A).$$

Il polinomio caratteristico non dipende dalla matrice associata a ϕ. Infatti vale la seguente:

2.5. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\phi \in End(V)$. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due basi di V, poste $A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $B = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$, allora*

$$p_A(T) = p_B(T).$$

<u>Dimostrazione</u>. Per ipotesi $B = P^{-1}AP$, dove $P = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$. Vogliamo provare che

$$\det(B - TI) = \det(A - TI).$$

Poiché $B - TI = P^{-1}AP - P^{-1}(TI)P = P^{-1}(A - TI)P$, usando in teorema di Binet (5.13, Cap. V) per il determinante di prodotti di matrici si ha che

$$\det(B - TI) = \det(P^{-1}(A - TI)P) = \det(P^{-1})\det(A - TI)\det(P).$$

La tesi segue da $\det(P^{-1})\det(P) = \det(I) = 1$, usando di nuovo il teorema di Binet. □

Poichè il polinomio caratteristico non dipende dalla matrice associata a ϕ, diamo la

2.6. Definizione. Per ogni matrice A associata all'endomorfismo ϕ di V, si pone $p_\phi(T) = p_A(T)$ e si dice *polinomio caratteristico* di ϕ.

Da 2.2 e 2.6 si ottiene allora il seguente:

2.7. Corollario. *Gli autovalori di ϕ sono le radici di $p_\phi(T)$ che appartengono a $\mathbb{R}$.* □

2.7.1. Esempio. Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$ determinato dalla matrice

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $p_\phi(T) = T^2 + 1$, quindi le sue radici sono $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Pertanto A non ha autovalori in $\mathbb{R}$ (ma ha 2 autovalori in $\mathbb{C}$).

2.8. Definizione. Sia $p(X)$ un polinomio a coefficienti reali e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una sua radice. Allora $p(X)$ è divisibile per $(X - \alpha)$ e quindi

$$p(X) = (X - \alpha)^m \cdot q(X)$$

dove m è il massimo intero possibile, cioè $q(X)$ è un polinomio non divisibile per $(X - \alpha)$. Si dice che α è una radice di *molteplicità* m e si scrive $m(\alpha) = m$.

2.8.1. Esempio. Sia $p(X) = (X - 2)(X - 3)(X^2 + 1)$. Le sue radici reali sono 2 e 3; chiaramente $m(2) = 1$ in quanto $(X - 3)(X^2 + 1)$ non ha 2 come radice. Analogamente $m(3) = 1$. Infine è chiaro che $p(X)$ ha altre due radici complesse, ma non reali: i e $-i$.

2.9. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$. Siano λ un autovalore di ϕ di molteplicità $m(\lambda)$ e V_λ il relativo autospazio; allora*

$$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq m(\lambda).$$

Dimostrazione. Sia $r = \dim(V_\lambda)$ e $\mathcal{C}$ una sua base. Completiamo $\mathcal{C}$ ad una base di V: sia essa $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$. Chiaramente $v_1, \ldots, v_r \in V_\lambda$ dunque sono autovettori associati a λ. Quindi $M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è del tipo

$$A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r+2,r+1} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Sviluppando il determinante di $A - TI$ col teorema di Laplace, ad esempio ripetutamente secondo la prima colonna, si ottiene facilmente che

$$p_\phi(T) = \det(A - TI) = (\lambda - T)^r g(T),$$

dove $g(T)$ è il polinomio caratteristico del blocco in basso a destra di A. Pertanto $r \leq m(\lambda)$. $\square$

2.10. Definizione. I numeri $\dim(V_\lambda)$ e $m(\lambda)$ vengono detti *molteplicità geometrica* e *molteplicità algebrica*, rispettivamente, dell'autovalore λ.

2.11. Osservazione. Sia $\phi \in End(V)$.

(a) Se $\lambda = 0_\mathbb{R}$ è un autovalore di ϕ, allora l'autospazio associato V_0 coincide con $\ker(\phi)$.

(b) Sia $\lambda \neq 0_\mathbb{R}$ un autovalore **non nullo** di ϕ. Allora il relativo autospazio V_λ è contenuto nell'immagine di ϕ. Infatti: se $v \in V_\lambda$ allora $\phi(v) = \lambda v$. Poiché $\lambda \neq 0_\mathbb{R}$, esiste $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$; dunque moltiplicando la precedente uguaglianza per λ^{-1} si ottiene

$$v = \lambda^{-1}\phi(v) = \phi(\lambda^{-1}v) \in \mathrm{Im}(\phi)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che ϕ è lineare. Quindi $V_\lambda \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$.
In particolare, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sono gli autovalori **non nulli** di ϕ, allora:

$$V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \quad \subseteq \quad \mathrm{Im}(\phi).$$

2.11.1. Esempio. Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^4)$ definito da $\phi((x, y, z, t)) = (2x + 4y, x + 2y, -z - 2t, z + t)$. La matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è chiaramente:

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posta A tale matrice, il polinomio caratteristico di ϕ è

$$p_\phi(T) = p_A(T) = |A - TI_4| = \begin{vmatrix} 2-T & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-T & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-T & 4 \\ 1 & 2-T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-T & -2 \\ 1 & 1-T \end{vmatrix} = T(T-4)(T^2+1).$$

Pertanto gli autovalori di ϕ (cioè le radici reali di p_ϕ) sono 0 e 4. Si vede facilmente che

$$V_0 = \ker(\phi) = \mathcal{L}((-2,1,0,0)), \qquad V_4 = \ker(\phi - 4I_4) = \mathcal{L}((2,1,0,0))$$

e V_4 è l'unico autospazio associato ad un autovalore non nullo di ϕ.
D'altra parte, poichè $\dim \mathrm{Im}(\phi) = 4 - \dim \ker(\phi) = 3$, una base dell'immagine è costituita da 3 colonne linearmenti indipendenti di A. Si osserva subito che la seconda colonna è multipla della prima. Le restanti 3 devono essere quindi una base per $\mathrm{Im}(\phi)$. Pertanto

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathcal{L}((2,1,0,0),(0,0,-1,1),(0,0,-2,1)).$$

E' chiaro che $V_4 \subset \mathrm{Im}(\phi)$, come affermato in 2.11 (b).

2.11.2. Esempio. Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^4)$ definito da $\phi((x,y,z,t)) = (2x+4y, x+2y, -z, z+t)$.
La matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è chiaramente:

$$M_\phi^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posta A tale matrice, il polinomio caratteristico di ϕ è

$$p_\phi(T) = p_A(T) = |A - TI_4| = \begin{vmatrix} 2-T & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = T(T-4)(T+1)(T-1).$$

Pertanto gli autovalori di ϕ sono $0, 4, -1, 1$. Si calcolano facilmente gli autospazi relativi:

$$V_0 = \ker(\phi) = \mathcal{L}((-2,1,0,0)), \qquad V_4 = \ker(\phi - 4I_4) = \mathcal{L}((2,1,0,0))$$
$$V_{-1} = \ker(\phi + I_4) = \mathcal{L}((0,0,-2,1)), \qquad V_1 = \ker(\phi - I_4) = \mathcal{L}((0,0,0,1)).$$

Questa volta i tre autospazi associati agli autovalori non nulli di ϕ costituiscono l'immagine di ϕ, infatti $\mathrm{Im}(\phi) = V_{-1} \oplus V_1 \oplus V_4$.

Concludiamo con un'ulteriore osservazione utile nel prossimo paragrafo. Si ricordi che il polinomio caratteristico $p_\phi(T)$ di un endomorfismo ϕ ha coefficienti reali. Dunque, poste $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tutte le sue radici reali e distinte (cioè tutti i suoi autovalori) e indicando $m_i = m(\lambda_i)$, con $i = 1, \dots, s$, per le molteplicità, si ha

$$p_\phi(T) = (T-\lambda_1)^{m_1} \cdots (T-\lambda_p)^{m_s} \cdot q(T)$$

e $q(T)$ non ha radici reali. Quindi $\deg(p_\phi(T)) \geq m_1 + \cdots + m_s$. Questo prova la seguente:

2.12. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\phi \in End(V)$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gli autovalori di ϕ e siano $m_1, \dots, m_s$ le rispettive molteplicità. Allora*

$$m_1 + \cdots + m_s \leq n.$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se tutte le radici di $p_\phi(T)$ sono reali (e quindi autovalori). $\square$

3. Diagonalizzazione

Lo scopo di questo paragrafo è di risolvere il problema iniziale, ovvero determinare un metodo per capire se un endomorfismo sia semplice o meno. Come visto, questo equivale a chiedersi se una matrice quadrata sia diagonalizzabile o meno.
Iniziamo con un importante teorema di caratterizzazione degli endomorfismi semplici.

3.1. Teorema. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\phi \in End(V)$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sono le radici di $p_\phi(T)$ di molteplicità $m_1, \dots, m_s$, rispettivamente, allora sono equivalenti:*

i) *ϕ è semplice;*

ii) *esiste una base di V costituita da autovettori;*

iii) *$\lambda_i \in \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \dots, s$ e $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$;*

iv) *$\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$, per ogni $i = 1, \dots, s$.*

In tal caso ogni base di V costituita da autovettori di ϕ consiste esattamente di m_1 autovettori per l'autovalore λ_1, ... , m_s autovettori per l'autovalore λ_s.

Dimostrazione. *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* Già visto in 1.10.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di autovettori. Allora ogni v_i appartiene ad uno degli autospazi, quindi

$$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \subseteq V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s};$$

l'altra inclusione è ovvia. Poiché la somma degli autospazi è diretta per 1.15, si ha la tesi.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* Sia $\mathcal{B}_i$ una base di V_{λ_i}, per ogni i; allora poichè V è la somma diretta di tutti gli autospazi, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_s$ è una base di V, ovviamente costituita da autovettori.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Dall'ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Grassmann in 5.7, Cap. III, segue

$$n = \dim(V) = \dim(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_s}) \leq m_1 + \cdots + m_s \leq n$$

dove la penultima disuguaglianza segue da 2.9 e l'ultima da 2.12. Pertanto sempre da 2.12 segue che ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e che $\dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)$ per ogni i.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* Poiché $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni i, per 2.12 si ha

$$n = m_1 + \cdots + m_s = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_s}),$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'ipotesi. Si ottiene pertanto $n = \dim(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s})$, quindi la tesi in quanto lo spazio vettoriale $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$ ha dimensione n e quindi coincide con V. $\square$

3.1.1. Esempio. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato (rispetto alla base canonica) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $p_A(T) = (1 - T)^2$, quindi vi è una sola radice $\lambda = 1$ con molteplicità (algebrica) 2. D'altra parte è immediato verificare che il corrispondente autospazio è dato da $V_1 = \mathcal{L}((1, 0))$ e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è 1. Essendo le due molteplicità distinte la matrice A non è diagonalizzabile e il corrispondente endomorfismo non è semplice.

3.2. Corollario. *Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $m(\lambda_i) = 1$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora ϕ è semplice.*

Dimostrazione. Immediato da 2.9 e 3.1 *iv*). □

3.3. Proposizione. *Sia $\phi \in End(V)$ un endomorfismo semplice e sia $\mathcal{C}$ una base di V tale che $\Delta = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$. Allora si hanno i seguenti fatti:*

i) la matrice Δ ha sulla diagonale gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ di ϕ, ripetuti secondo le relative molteplicità $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_s)$;

ii) la matrice Δ è unica, a meno di permutazioni degli autovalori sulla diagonale (corrispondenti a permutazioni degli elementi della base $\mathcal{C}$.

Dimostrazione.
i) Per 1.8, la matrice $\Delta = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sulla diagonale, ognuno di essi ripetuto un certo numero di volte. Più precisamente, λ_1 compare tante volte quanti sono i vettori di $\mathcal{C}$ che sono autovettori per l'autovalore λ_1, e così via. Per l'ultima parte del teorema 3.1, tale numero è $m(\lambda_1)$ per l'autovalore λ_1, ..., $m(\lambda_s)$ per l'autovalore λ_s.
ii) Ovvio. □

3.4. Proposizione. *Sia $\phi \in End(V)$ un endomorfismo semplice e sia $\mathcal{B}$ una qualunque base di V. Posta $A = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, sia P una matrice che trasforma A in una matrice diagonale Δ ad essa simile, ovvero tale che $P^{-1}AP = \Delta$. Allora le colonne di P sono le componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, di una base di autovettori di ϕ.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una base di V tale che $\Delta = M_\phi^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$, ovvero per 1.10, una base di autovettori di ϕ. La tesi segue dal fatto che $P = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, la matrice del cambio base. □

3.5. Definizione. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, *diagonalizzare* A significa determinare, se esistono, una matrice diagonale Δ simile ad A e una matrice invertibile $P \in GL(n)$ tale che $P^{-1}AP = \Delta$.

Alla luce della teoria precedente, abbiamo il seguente:

3.6. Metodo pratico di diagonalizzazione.
Sia data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Per la sua diagonalizzazione si procede come segue:

1) si calcola il polinomio caratteristico $p_A(T)$ di A e si trovano le sue radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ con relative molteplicità $m_1, \ldots, m_s$;

2) se esiste un indice i tale che $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, allora A non è diagonalizzabile;

3) se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \ldots, s$, si calcolano le dimensioni $\dim(V_{\lambda_i}) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_i I_n)$. Se esiste i tale che $m_i \neq \dim(V_{\lambda_i})$, allora A non è diagonalizzabile;

4) se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $m(\lambda)_i = \dim(V_{\lambda_i})$, per ogni $i = 1, \ldots, s$, la matrice A è diagonalizzabile; in tal caso, A è simile ad ogni matrice diagonale Δ avente gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sulla diagonale, ripetuti secondo le relative molteplicità $m_1, \ldots, m_s$;

5) più precisamente $\Delta = M_\phi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, ove $\mathcal{B}$ è una base di di V costituita da autovettori e anche $\Delta = P^{-1}AP$, dove la matrice P è la matrice di cambio di base $P = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.
Poiché V è la somma diretta di tutti gli autospazi (per 3.1), si ha che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_s$, ove $\mathcal{B}_i$ è una base dell'autospazio V_{λ_i}, per ogni $i = 1, \ldots, s$. avendo determinato V_{λ_i} come in 2.1.

3.6.1. Esempio. Vogliamo diagonalizzare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 3-T & 1 & 1 \\ 1 & -T & 2 \\ 1 & 2 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + 3T^2 + 6T - 8 = (T-1)(T-4)(T+2).$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ e una matrice diagonale simile ad A è

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Volendo determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori e quindi una matrice invertibile P, si procede come segue: poichè $V_1 = \ker(A - I_3)$, V_1 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - I_3)X = 0$ associato alla matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{che viene ridotta in} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto le soluzioni del precedente sistema sono $(x, y, z) = (x, -x, -x)$, quindi $V_1 = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$ Analogamente si calcolano $V_4 = \ker(A - 4I_3) = \mathcal{L}((2, 1, 1))$, $V_{-2} = \ker(A + 2I_3) = \mathcal{L}((0, -1, 1))$, da cui $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (2, 1, 1), (0, -1, 1))$ e inoltre

$$P = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore la verifica che $P^{-1}AP = \Delta$.

Concludiamo con una interessante proprietà:

3.7. Proposizione. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice diagonalizzabile avente autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ con relative molteplicità $m_1, \dots, m_s$. Allora*

$$\det(A) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_s^{m_s}$$
$$\operatorname{tr}(A) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_s\lambda_s.$$

Dimostrazione. La matrice A è simile ad ogni matrice diagonale Δ avente gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sulla diagonale, ripetuti secondo le relative molteplicità $m_1, \dots, m_s$; ovvero esiste una matrice invertibile P tale che $\Delta = P^{-1}AP$. Ricordando il teorema di Binet per il determinante del prodotto di due matrici (cf. 5.13 Cap. V) e l'analoga proprietà della traccia del prodotto di due matrici (cf. 8.2 Cap. V), si ottengono rispettivamente:

$$\det(\Delta) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$
$$\operatorname{tr}(\Delta) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(PP^{-1}A) = \operatorname{tr}(A).$$

Quindi si ha:

$$\det(A) = \det(\Delta) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_s^{m_s},$$
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\Delta) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_s\lambda_s,$$

ovvero la tesi. $\square$

4. Forma canonica di Jordan

Menzioniamo in breve il concetto di *forma canonica di Jordan* di una matrice. Come discusso precedentemente, una matrice quadrata A non è necessariamente diagonalizzabile, ovvero non è necessariamente simile a una matrice diagonale. D'altra parte si mostra che una qualunque matrice quadrata è sempre simile ad una matrice triangolare J che è 'vicina' all'essere diagonale. La matrice J è diagonale se e solo se A è diagonalizzabile, altrimenti è divisa in blocchi detti *blocchi di Jordan.*

Un esempio di blocco di Jordan è la matrice non diagonalizzabile in 3.1.1 di Cap. 8, denotata

$$J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, un blocco di Jordan di ordine k è una matrice $k \times k$ triangolare superiore del tipo

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

in cui lungo la diagonale viene ripetuto lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ mentre l'elemento di posizione $(j, j+1)$ è uguale a 1 e tutti i rimanenti elementi sono nulli. Si vede subito che il suo polinomio caratteristico è semplicemente $(T-\lambda)^k$, e quindi λ è l'unico autovalore di molteplicità algebrica k. D'altra parte, come nell'esempio 3.1.1 di Cap. 8, il corrispondente autospazio è chiaramente dato da

$$V_\lambda = \ker(J_k(\lambda) - \lambda\, I_n) = \mathcal{L}((1, 0, \ldots, 0)),$$

con dimensione (molteplicità geometrica di λ) uguale a 1. Ne segue che se l'ordine $k > 1$ il blocco di Jordan non è diagonalizzabile.

Una matrice in forma canonica di Jordan o *matrice di Jordan* è una matrice diagonale a blocchi, cioè del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

dove la matrice $J_{k_j}(\lambda_j)$ è un blocco di Jordan di ordine k_j e autovalore λ_j, con $j = 1, \ldots, s$.

Si noti che lo stesso autovalore può comparire in blocchi di Jordan diversi, cioè è possibile che $\lambda_j = \lambda_l$ anche con $k_j \neq k_l$. Ogni blocco di Jordan contribuisce con un autospazio di dimensione 1 per il corrispondente autovalore. La molteplicità geometrica dell'autovalore λ_j è pari quindi al numero di blocchi con autovalore λ_j. D'altra parte, la molteplicità algebrica di λ_j è pari alla somma degli ordini di tutti i blocchi con lo stesso autovalore λ_j.

Il teorema di Jordan afferma che ogni matrice può essere trasformata per similitudine in una 'forma canonica di Jordan'. La forma canonica caratterizza univocamente (in generale sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$) la classe di similitudine di una matrice quadrata, ovvero due matrici sono simili se e solo se hanno la stessa forma di Jordan, a meno di permutazione dei blocchi.

4.1. Teorema. *(Jordan) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che il suo polinomio caratteristico ha solo radici reali, radici che sono quindi tutti autovalori di A. Allora*

i) La matrice A è simile a una matrice di Jordan.

ii) Due matrici di Jordan J e J' sono simili se e solo se l'una si ottiene dall'altra con una permutazione dei blocchi.

In generale il polinomio caratteristico della matrice A ha radici complesse, quindi il precedente teorema ha una versione (invero più naturale) sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Nel caso generale, non vi sono autovettori indipendenti di A in numero sufficiente a formare una base di $\mathbb{R}$. Allora, la matrice invertibile P che realizza la similitudine tra A e J, ovvero tale che $P^{-1}AP = J$ (cf. 1.3 Cap. VIII) ha per colonne le componenti rispetto alla base canonica dei cosiddetti *autovettori generalizzati* di A, una nozione a cui ora accenniamo succintamente.

Se λ è un autovalore di A con molteplicità algebrica $m = m(\lambda) \geq 1$, un corrispondente autovettore generalizzato è un vettore non nullo v che sia soluzione del sistema omogeneo

$$(A - \lambda\, I_n)^m v = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Si prova che esistono m soluzioni indipendenti v_j con $j = 1, \dots, m$, ottenute in maniera ricorsiva:

$$(A - \lambda\, I_n)v_1 = 0_{\mathbb{R}^n}, \qquad (A - \lambda\, I_n)v_k = v_{k-1}, \quad k = 2, \dots m,$$

che generano l'autospazio *generalizzato* V_λ della matrice A corrispondente all'autovalore λ. Gli autovettori generalizzati sono quindi tali da soddisfare $(A-\lambda\, I_n)^k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$, per ogni $k = 1, 2, \dots m$.

4.1.1. Esercizio. Si calcoli la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico si trova essere $p_A(T) = (T-1)(T-2)(T-4)^2$ e quindi i suoi autovalori solo $1, 2, 4^2$. Essendo la moltiplicità algebrica degli autovalori $1, 2$ pari a 1 la corrispondente molteplicità geometrica è anch'essa 1 (cf. 2.9 di Cap. VIII). D'altra parte si vede direttamente che

$$\dim \ker(A - 4\, I_4) = 1.$$

Ne segue che A non è diagonalizzabile e che l'autovalore 4 corrisponde a un blocco di Jordan. Una forma canonica di A è allora la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.1.2. Esercizio. Le due matrici seguenti

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno gli stessi polinomi caratteristici, e quindi gli stessi autovalori, lo stesso determinante e la stessa traccia, ma non sono simili in quanto l'una non si ottiene dall'altra permutandone i blocchi.