Capitolo VII
APPLICAZIONI LINEARI

1. Applicazioni lineari e matrici

Abbiamo già osservato che $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{V}_O^3$ hanno la "stessa struttura" di spazio vettoriale, cioè sono isomorfi, e come $\mathbb{R}^{2,3}$ "assomigli" a $\mathbb{R}^6$. In questo capitolo cercheremo di precisare tali situazioni, studiando relazioni tra spazi vettoriali. Tali relazioni saranno implementate da matrici: una matrice viene usata come una operazione che trasforma vettori di uno spazio vettoriale in altri vettori che, in generale, appartengono ad un differente spazio vettoriale.

1.1.1. Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Consideriamo l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{definita da} \quad f(X) = AX,$$

ove $X = {}^t(x, y)$ è un vettore colonna e AX indica l'usuale prodotto righe per colonne:

$$f(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = {}^t(ax + by, cx + dy).$$

Se $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ sono elementi di $\mathbb{R}^2$, usando le proprietà della moltiplicazione di matrici si verifica facilmente che $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$. Infatti si ha:

$$f(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = f(X) + f(Y).$$

Analogamente si verifica che, se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f(\lambda X) = \lambda f(X)$.

Generalizziamo l'esempio precedente al caso di una matrice qualunque.

1.1.2. Esempio. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita da $f(X) = AX$, ove con X si intende il vettore colonna $X := {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ e con AX l'usuale prodotto righe per colonne. Dalle proprietà del prodotto di matrici, come prima si verificano le relazioni: $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$, e $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1.3. Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$. Allora $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è data da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

1.2. Definizione. Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Un'applicazione $f : V \longrightarrow W$ si dice *lineare* se gode delle seguenti proprietà:

(L_1) $\qquad f(X + Y) = f(X) + f(Y) \qquad \forall\, X, Y \in V$

(L_2) $\qquad f(\lambda X) = \lambda f(X) \qquad \forall\, X \in V, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

È immediato provare alcune proprietà elementari delle applicazioni lineari.

1.3. Proposizione. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare; valgono i seguenti fatti:*

i) $f(0_V) = 0_W$;

ii) $f(-v) = -f(v)$, *per ogni* $v \in V$;

iii) $f(a_1v_1 + \cdots + a_pv_p) = a_1f(v_1) + \cdots + a_pf(v_p)$,

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$, *per ogni* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché f è un'applicazione lineare, valgono le proprietà (L_1) ed (L_2) di 1.2.

i) Osserviamo che $0_V = 0_{\mathbb{R}}0_V$. Dunque applicando (L_2):

$$f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}}0_V) = 0_{\mathbb{R}}f(0_V) = 0_W.$$

ii) Poiché $-v = (-1)v$, per (L_2) si ha

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v).$$

iii) Proviamo la tesi per induzione finita su p.
Se $p = 2$, la tesi è vera per le proprietà (L_1) ed (L_2) applicate successivamente; infatti

$$f(a_1v_1 + a_2v_2) = f(a_1v_1) + f(a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2).$$

Supponiamo vera la tesi per $p-1$ e proviamola per p.
Posto $w := a_1v_1 + \cdots + a_{p-1}v_{p-1}$, si ha

$$f(a_1v_1 + \cdots + a_pv_p) = f(w + a_pv_p) = f(w) + f(a_pv_p) = f(w) + a_pf(v_p)$$

dove la seconda uguaglianza segue da (L_1) e la seconda da (L_2).
Ma per l'ipotesi induttiva $f(w) = a_1f(v_1) + \cdots + a_{p-1}f(v_{p-1})$, quindi

$$f(a_1v_1 + \cdots + a_pv_p) = f(w) + a_pf(v_p) = a_1f(v_1) + \cdots + a_{p-1}f(v_{p-1}) + a_pf(v_p)$$

che è la tesi per p. $\square$

Negli esempi 1.1.1 e 1.1.2 abbiamo visto come associare ad una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ una applicazione lineare tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Tale procedimento si può generalizzare a spazi vettoriali qualunque usando due basi, una del dominio e una del codominio.
Infatti, siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ due rispettive basi. Ad una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si associ l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ definita come segue: per ogni $v \in V$, si può scrivere univocamente $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ cioè $v = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$. Posto $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, si consideri il vettore $AX \in \mathbb{R}^m$; si ponga ${}^t(y_1, \ldots, y_m) = AX$. Definiamo

$$f(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m. \qquad (*)$$

In sintesi:

$$f((x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}}. \qquad (**)$$

1.3.1. Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ e siano $V = \mathbb{R}[X]_2$ e $W = \mathbb{R}[X]_1$. Siano inoltre $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ e $\mathcal{C} = (1, X)$ basi di V e W, rispettivamente. Allora l'applicazione lineare associata ad A è definita da

$$f(a + bX + cX^2) = (A\,{}^t(a, b, c))_{\mathcal{C}},$$

dunque

$$f(a + bX + cX^2) = (a + 2b + c, a - b)_{\mathcal{C}} = a + 2b + c + (a - b)X.$$

1.4. Proposizione. *Sia $f : V \longrightarrow W$ l'applicazione definita in $(*)$ o in $(**)$, allora f verifica le proprietà (L_1) ed (L_2), cioè f è un'applicazione lineare.*

Dimostrazione. Siano $v, v' \in V$ con $v = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ e $v' = (x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{B}}$.
Poiché, da 4.12 Cap. III, si ha

$$v + v' = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)_{\mathcal{B}},$$

allora

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (A\,{}^t(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n))_{\mathcal{C}} = \\ &= (A\,{}^t(x_1, \dots, x_n))_{\mathcal{C}} + (A\,{}^t(x'_1, \dots, x'_n))_{\mathcal{C}} = f(v) + f(v') \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue da 1.7 *(ii)*, Cap. V.
Analogamente si prova che, se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. □

A questo punto possiamo dare la seguente fondamentale:

1.5. Definizione. Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali con rispettive basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$; sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. L'applicazione lineare

$$f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}} : V \longrightarrow W$$

che ad ogni $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in V$ associa $f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m$, ove

$${}^t(y_1, \dots, y_m) = A\,{}^t(x_1, \dots, x_n),$$

si dice *applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

1.6. Osservazione. Con le notazioni precedenti, posta $f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = f$, si ha che le n colonne di A sono le componenti, rispetto alla base $\mathcal{C}$ di W, dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$, ove $(v_1, \dots, v_n)$ è la base $\mathcal{B}$ di V. Infatti $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = (1, 0, \dots, 0)_{\mathcal{B}}$, dunque

$$f(v_1) = (A\,{}^t(1, 0, \dots, 0))_{\mathcal{C}} = {}^t(a_{11}, \dots, a_{m1})_{\mathcal{C}};$$

quindi $f(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m$.
Analogamente si verifica che $f(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})_{\mathcal{C}}$, per ogni i.

In particolare, se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare definita da $f(X) = AX$, allora le colonne di A concidono con le immagini attraverso f dei vettori $(e_1, \dots e_n)$ della base canonica $\mathcal{E}_n$ di $\mathbb{R}^n$. Cioè, scrivendo A per colonne:

$$A = (\, f(e_1) \quad f(e_2) \quad \cdots \quad f(e_n)\,)\,.$$

1.6.1. Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{E}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo l'applicazione associata $f = f_A^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sia $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; allora per definizione $f((x, y, z)) = A^t(x, y, z)$ quindi f è data dalle equazioni

$$f((x, y, z)) = (x + y - z, y + 2z, x + y).$$

Inoltre, poiché $\mathcal{B}$ è la base canonica si ha

$$f(e_1) = (1, 0, 1),\ f(e_2) = (1, 1, 1),\ f(e_3) = (-1, 2, 0).$$

Osserviamo che $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sono, rispettivamente, le colonne della matrice A. Ribadiamo che tale situazione è molto particolare: infatti in generale le colonne di A sono le componenti di $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$; in tale esempio $\mathcal{C}$ è la base canonica e dunque le componenti di $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ coincidono con le loro componenti, come vettori di $\mathbb{R}^3$.

La proposizione 1.4 mostra che le applicazioni del tipo $f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, associate a matrici, sono lineari. Vogliamo adesso mostrare che tutte le applicazioni lineari sono di questo tipo, cioè vogliamo provare che, per ogni applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, fissando due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V e W, rispettivamente, esiste un'opportuna matrice A tale che $f = f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.
L'osservazione 1.6 mostra che, data una matrice A, le immagini attraverso $f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ degli elementi di una fissata base $\mathcal{B}$ di V sono individuate dalle colonne di A. Operiamo dunque il procedimento inverso da un'appicazione lineare ad una matrice.

1.7. Definizione. Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali con rispettive basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$; sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Si dice *matrice associata* ad f *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, e si denota con $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$ le cui colonne sono costituite dalle componenti, rispetto a $\mathcal{C}$, delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$. Esplicitamente, dalle espressioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

viene individuata la matrice $A = (a_{ij})$ e si pone $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A$.

Abbiamo dunque associato un'applicazione lineare ad una matrice ed una matrice ad ogni applicazione lineare. Questi procedimenti sono uno l'inverso dell'altro; più precisamente vale il seguente fatto, di cui omettiamo la dimostrazione.

1.8. Proposizione. *Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali di dimensioni n ed m rispettivamente; si fissino una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W. Allora:*

i) se $f : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare, posta $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, si ha:

$$f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = f;$$

ii) se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una data matrice, posta $f = f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, si ha:

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A.$$

1.9. Proposizione. *Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base di V. Si considerino n vettori qualunque di W: $\{u_1, \dots, u_n\}$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tale che $f(v_i) = u_i$, per $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Si estende l'applicazione per linearità una volta definita sui vettori della base scelta per V. Sia v un qualunque vettore di V. Allora v si scrive in modo unico come

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Definiamo

$$f(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n.$$

Tale applicazione è lineare per costruzione e chiaramente $f(v_i) = u_i$ per ogni i.

Per provare l'unicità, osserviamo che, se esistesse un'altra applicazione lineare $g : V \longrightarrow W$ tale che $g(v_i) = u_i$, per $i = 1, \dots, n$, allora per 1.3 dovrebbe essere

$$g(v) = a_1 g(v_1) + \cdots + a_n g(v_n) = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = f(v),$$

ovvero $g = f$ come applicazione lineare. $\square$

Dalle considerazioni precedenti, ribadiamo due modi equivalenti per definire una applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

I. Si fissano una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W ed una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Per la proposizione 1.8 è univocamente determinata l'applicazione lineare $f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

II. Si fissa una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V ed n vettori $\{u_1, \dots, u_n\}$ di W. Da 1.9 esiste un'unica applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tale che $f(v_i) = u_i$, per $i = 1, \dots, n$.

Notazione. Nel seguito, se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è la base canonica, scriveremo $f((x_1, \dots, x_n))$ invece di $f((x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}})$. Analogamente se $W = \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{C}$ è la base canonica, scriveremo $(y_1, \dots, y_m)$ invece di $(y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}}$.

Ad esempio, con la notazione appena introdotta, se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio, f si esprime nei seguenti modi:

$$f((x_1, \dots, x_n)) = A^t(x_1, \dots, x_n)$$

oppure

$$f((x_1, \dots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

1.9.1. Esempio. Sia $f_0 : V \to W$ l'*applicazione nulla*, cioè $f_0(v) = 0_W$, per ogni $v \in V$; e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi (qualunque) di V e W, rispettivamente. Allora $M_{f_0}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = 0_{\mathbb{R}^{m,n}}$ che è la matrice nulla.

1.9.2. Esempio. Sia $id_V : V \longrightarrow V$ l'*applicazione identica* definita da $id_V(v) = v$, per ogni $v \in V$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una qualunque base di V. Allora

$$id_V(v_i) = v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)_{\mathcal{B}}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$; ad esempio

$$id_V(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = (1, 0, \dots, 0)_{\mathcal{B}}$$

Dunque la matrice $M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è la matrice identica I_n. Si noti che, se $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$, allora $M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ non è la matrice identica.

1.9.3. Esempio. Per $\mathbb{R}^3$, consideriamo la base canonica $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ e la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dove

$$v_1 = (0, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 0).$$

Allora

$$M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{id}^{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che queste due matrici sono una l'inversa dell'altra. Ritorneremo a questo tipo di matrici in seguito a proposito della procedura di cambio di base in uno spazio vettoriale.

2. Richiami su applicazioni tra insiemi

Il lettore avrà già incontrato i concetti di iniettività, suriettività e biiettività di una applicazione tra insiemi. Iniziamo richiamando tali nozioni.

2.1. Definizione. Siano X e Y due insiemi non vuoti e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Si dice *immagine dell'elemento* $x \in X$ il corrispondente elemento $f(x)$ di Y. Si dice *immagine* di f, e si denota con $\mathrm{Im}(f)$, il sottoinsieme di Y costituito dalle immagini di tutti gli elementi di X, cioè

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in Y \mid \text{esiste } x \in X \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

Infine si dice *controimmagine* di un elemento $y \in Y$, e si denota con $f^{-1}(y)$, l'insieme (eventualmente vuoto) degli elementi di X che hanno per immagine y, cioè

$$f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

2.2. Definizione. Siano X e Y due insiemi non vuoti e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione.

i) Si dice che f è *iniettiva* se, comunque scelti $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) Si dice che f è *suriettiva* se, comunque scelto $y \in Y$, esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

iii) Si dice che f è *biiettiva* o *biunivoca* se è sia iniettiva che suriettiva.

Osserviamo che (usando la terminologia della definizione 2.1) l'iniettività di un'applicazione significa che le immagini di elementi distinti sono distinte, mentre la suriettività significa che ogni elemento del codominio è immagine di qualche elemento del dominio, cioè che $\mathrm{Im}(f) = Y$.

2.3. Definizione. Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ due applicazioni tra insiemi. Si dice *applicazione composta* di g con f, e si indica con $g \circ f$, l'applicazione

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

definita da: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, per ogni $x \in X$.

2.4. Definizione. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione tra insiemi. Si dice che f è *invertibile* se esiste un'applicazione $g : Y \longrightarrow X$ tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$; in tal caso g (che si prova essere unica) si dice *applicazione inversa* di f e si indica con f^{-1}.

Richiamiamo, senza dimostrarlo, anche il noto risultato:

2.5. Proposizione. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione tra insiemi. Allora*

$$f \text{ è invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è biiettiva.}$$

In tal caso, anche f^{-1} è invertibile e quindi biiettiva. $\square$

2.6. Osservazione. Se $f : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione tra insiemi, il simbolo f^{-1} si usa per denotare sia la controimmagine di un elemento sia l'applicazione inversa e ciò potrebbe generare confusione. Osserviamo che ogni elemento $y \in Y$ ammette controimmagine $f^{-1}(y)$ (che peraltro risulta vuota se $y \notin \mathrm{Im}(f)$) mentre non sempre esiste l'applicazione inversa f^{-1}.
Tuttavia, se f è invertibile, allora la sua inversa esiste e ha per dominio Y e per codominio X:

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \quad \text{definita da} \quad y \mapsto f^{-1}(y)$$

dove, in questo caso (e solo in questo), $f^{-1}(y)$ è proprio la controimmagine di y (non vuota perché f suriettiva e costituita da un solo elemento perché f iniettiva).

3. Sottospazi associati ad una applicazione lineare

È utile individuare due sottospazi (uno del dominio ed uno del codominio) che, in un certo senso, "misurano" di quanto un'applicazione lineare manca dell'iniettività o della suriettività.

3.1. Definizione. Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, si dice *nucleo* di f, e si denota con $\ker(f)$, il sottoinsieme di V definito da:

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}.$$

Si dice *immagine* di f (come nella definizione insiemistica 2.1), il sottoinsieme di W definito da: $\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \text{esiste } v \in V \text{ tale che } w = f(v)\}$.

3.2. Teorema. *Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V e $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Dimostrazione. Siano $v, v' \in \ker(f)$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Vogliamo provare che $\lambda v + \lambda' v' \in \ker(f)$, cioè che $f(\lambda v + \lambda' v') = 0_W$. Per ipotesi $f(v) = 0_W = f(v')$; dunque, applicando 1.3 *iii*), si ottiene $f(\lambda v + \lambda' v') = \lambda f(v) + \lambda' f(v') = 0_W$. Quindi $\ker(f)$ è un sottospazio di V.

Siano ora $w, w' \in \mathrm{Im}(f)$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Per ipotesi esistono $v, v' \in V$ tali che $w = f(v)$ e $w' = f(v')$. Dunque $\lambda w + \lambda' w' = \lambda f(v) + \lambda' f(v') = f(\lambda v + \lambda' v') \in \mathrm{Im}(f)$, dove l'ultima uguaglianza si ha ancora per 1.3 *iii*). Quindi $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W. $\square$

È immediato determinare un sistema di generatori dell'immagine, come mostra il seguente risultato. Come vedremo, non è altrettanto facile per il nucleo.

3.3. Lemma. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$, ove $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ è una qualunque base di V. In particolare, f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano W.*

Dimostrazione. Sia $w \in \mathrm{Im}(f)$, cioè $w = f(v)$ per un opportuno $v \in V$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base, si può scrivere $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$; dunque, per la linearità di f, $w = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$ e quindi appartiene a $\mathcal{L}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$. Pertanto $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{L}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$. Il viceversa è ovvio, poiché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W e contiene i vettori $f(v_1), \ldots, f(v_n)$.
L'ultima affermazione discende dal fatto che f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = W$. $\square$

3.3.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$f((x, y, z)) = (x + y - z, x - y + z).$$

Per 3.3, $\mathrm{Im}(f)$ è generata dalle immagini dei vettori di una qualunque base di $\mathbb{R}^3$. Si scelga, ad esempio la base canonica; dunque $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Dalla definizione di f si ha che

$$f(e_1) = (1, 1), \quad f(e_2) = (1, -1), \quad f(e_3) = (-1, 1)$$

che sono quindi un sistema di generatori di $\mathrm{Im}(f)$. Infine $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, cioè f è suriettiva.

3.4. Lemma. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra $\mathbb{R}$–spazi vettoriali. Allora:*

i) *f è iniettiva se e solo se* $\ker(f) = \{0_V\}$.

ii) *se f è iniettiva e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. (i) "$\Rightarrow$" Sia $v \in \ker(f)$, cioè tale che $f(v) = 0_W$. D'altra parte ricordiamo che $f(0_V) = 0_W$ per 1.3. Dalla definizione di iniettività segue che v e 0_V, avendo la stessa immagine, coincidono. Dunque $v = 0_V$ e quindi si ha la tesi.
"$\Leftarrow$" Viceversa, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_1) = f(v_2)$. Dunque $f(v_1) - f(v_2) = 0_W$; ma f è lineare e quindi $f(v_1 - v_2) = 0_W$. Pertanto $v_1 - v_2$ appartiene al nucleo di f, che è nullo per ipotesi, quindi $v_1 - v_2 = 0_V$.
(ii) Supponiamo che esistano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_W$. Per la linearità di f ciò equivale a $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_W$ e quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \ker(f)$.
Ma $\ker(f) = \{0_V\}$ per (i), in quanto f è iniettiva per ipotesi; quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$. Poiché $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, ne segue che $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$ e quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. □

3.4.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f((x, y)) = (x + y, x - y, 2x + 3y).$$

Dalla definizione di nucleo si ha che

$$\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f((x, y)) = (x + y, x - y, 2x + 3y) = (0, 0, 0)\}.$$

Occorre dunque risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases}$$

ed è immediato vedere che tale sistema ha come unica soluzione $(0, 0)$. Pertanto $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ e quindi f è iniettiva per 3.4 (i). Ancora per tale risultato (parte (ii)) si ha che le immagini dei vettori di una qualunque base di $\mathbb{R}^2$ sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Verifichiamolo in un caso particolare:

$$f(e_1) = (1, 1, 2), \quad f(e_2) = (1, -1, 3)$$

sono linearmente indipendenti.

4. Isomorfismi

4.1. Definizione. Siano V e W due $\mathbb{R}$–spazi vettoriali. Un'applicazione $f : V \longrightarrow W$ lineare e biiettiva si dice *isomorfismo*. Due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo $f : V \longrightarrow W$ e si scrive $V \cong W$.

4.2. Proposizione. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un isomorfismo; allora $f^{-1} : W \longrightarrow V$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per 2.5, f è invertibile e la sua inversa f^{-1} è biiettiva. Resta solo da provare che f^{-1} è anch'essa lineare.
Siano dunque $w_1, w_2 \in W$ e si considerino $v_1 = f^{-1}(w_1)$ e $v_2 = f^{-1}(w_2)$ i corrispondenti vettori di V. Per definizione di applicazione inversa, è chiaro che $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$.
Siano ora $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Allora, poiché f è lineare:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

da cui, applicando f^{-1}:

$$f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2),$$

ovvero f^{-1} è a sua volta un'applicazione lineare, e quindi isomorfismo. $\square$

Vogliamo dare una importante caratterizzazione di isomorfismo. Per fare questo, abbiamo bisogno di un risultato preliminare.

4.3. Lemma. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V. Sono fatti equivalenti:*

i) f è un isomorfismo;

ii) $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ è una base di W.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ Per ipotesi f è sia suriettiva che iniettiva, dunque $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano W (per 3.3) e sono linearmente indipendenti (per 3.4 (ii)). Quindi costituiscono una base di W.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Per ipotesi, $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ è una base di W e, per 1.9, esiste un'unica applicazione lineare $g : W \longrightarrow V$ tale che $g(f(v_i)) = v_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. In altre parole, le due applicazioni lineari $g \circ f$ e id_V coincidono sulla base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V. Dunque, ancora per 1.9, sono la stessa applicazione lineare, cioè $g \circ f = id_V$. D'altra parte è facile verificare che $f \circ g = id_W$. Da cui segue che $g = f^{-1}$, quindi f è invertibile e dunque isomorfismo. $\square$

4.4. Teorema. *Siano V e W due $\mathbb{R}$–spazi vettoriali. Allora*

$$V \text{ e } W \text{ sono isomorfi} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(V) = \dim(W).$$

Dimostrazione. " $\Rightarrow$ " Per ipotesi esiste un isomorfismo $f : V \longrightarrow W$. Per 4.3, se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V allora $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ è una base di W. Dunque $\dim(V) = n = \dim(W)$.
" $\Leftarrow$ " Sia $n = \dim(V) = \dim(W)$. Costruiamo un isomorfismo $f : V \longrightarrow W$. A tale scopo si fissino una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V ed una base $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ di W. Sia f l'applicazione lineare definita da: $f(v_i) = w_i$ per ogni i; tale f esiste ed è unica per 1.9. Essendo $\mathcal{C}$ una base di W, per 4.3 tale applicazione lineare è un isomorfismo. $\square$

4.5. Corollario. *Se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n, allora $V \cong \mathbb{R}^n$. In particolare, ogni scelta di una base $\mathcal{B}$ di V induce l'isomorfismo naturale*

$$\alpha:\ V \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{R}^n \quad \textit{definito da} \quad (x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \mapsto (x_1,\dots,x_n).$$

Dimostrazione. La prima parte segue immediatamente da 4.4. Inoltre, posta $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$, α è definita come l'unica applicazione lineare (vedi 1.9) tale che $\alpha(v_i) = e_i$ per ogni $i = 1,\dots,n$. Per 4.3 tale applicazione è un isomorfismo. Infine è immediato vedere che su ogni vettore di V tale applicazione risulta essere $\alpha:\ (x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \mapsto (x_1,\dots,x_n)$. □

4.5.1. Esempio. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]_2$ dei polinomi di grado limitato a 2. Come è noto V ha dimensione 3 ed una sua base è, ad esempio, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. L'isomorfismo indotto da $\mathcal{B}$ definito in 4.5 è ovviamente:

$$\alpha:\ \mathbb{R}[X]_2 \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{R}^3 \quad \text{definito da} \quad a + bX + cX^2 \mapsto (a,b,c).$$

Utilizzando 4.3, si osservi che la verifica che 3 polinomi di $\mathbb{R}[X]_2$ costituiscono una sua base è immediata. Infatti, si considerino ad esempio

$$p_1(X) = 3X - X^2, \quad p_2(X) = 1 + X, \quad p_3(X) = 2 + 3X^2.$$

Si pongano $v_1 = \alpha(p_1) = (0,3,-1), v_2 = \alpha(p_2) = (1,1,0), v_3 = \alpha(p_3) = (2,0,3)$. Poiché il rango della matrice che ha per righe v_1, v_2, v_3 è 3, si ha che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$.
Si osservi infine che, essendo α un isomorfismo, anche $\alpha^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$ è un isomorfismo per 4.2. Dunque, per 4.3, i vettori $\alpha^{-1}(v_1), \alpha^{-1}(v_2), \alpha^{-1}(v_2)$ sono una base di $\mathbb{R}[X]_2$. Ed è chiaro che tali vettori sono i polinomi iniziali $p_1(X), p_2(X), p_3(X)$: dunque essi sono una base di $\mathbb{R}[X]_2$.

Dal Teorema 4.4 si ha che una condizione necessaria perché una applicazione lineare sia isomorfismo è che dominio e codominio abbiano la stessa dimensione. Dunque è opportuno enunciare un criterio di isomorfismo solo per applicazioni lineari tra spazi vettoriali della stessa dimensione. E' ciò che faremo in uno dei prossimi paragrafi.

5. Calcolo di nucleo e immagine

Non tutte le applicazioni lineari sono isomorfismi; sicuramente non lo sono se la dimensione del dominio e quella del codominio sono diverse (vedi 4.4). Se un'applicazione lineare non è un isomorfismo significa che non è iniettiva oppure non è suriettiva. Dunque vogliamo caratterizzare tali proprietà attraverso lo studio di nucleo e immagine, cercando anche un metodo effettivo per determinare una base di ognuno.

5.1. Proposizione (Metodo per il calcolo del nucleo). *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e sia $\dim(V) = n$. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi qualunque di V e W rispettivamente e $A := M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Posto $\Sigma :\ AX = 0$ il sistema lineare omogeneo associato ad A, si hanno i seguenti fatti:*

i) $\ker(f) \cong S_\Sigma$ *attraverso l'isomorfismo* $(x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \mapsto (x_1,\dots,x_n)$*;*

ii) $\dim(\ker(f)) = n - \operatorname{rk}(A)$*;*

iii) se $(v_1,\dots,v_p)$ *è una base di* S_Σ *allora* $((v_1)_{\mathcal{B}},\dots,(v_p)_{\mathcal{B}})$ *è una base di* $\ker(f)$.

Dimostrazione. (i) Dalla definizione di nucleo e dalla forma matriciale di un'applicazione lineare:

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} = \left\{ v = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V \;\middle|\; \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V \mid (x_1, \ldots, x_n) \in S_\Sigma\}$$

dove S_Σ è lo spazio delle soluzioni di Σ. Dunque è individuato l'isomorfismo (vedi 4.5)

$$S_\Sigma \longrightarrow \ker(f) \quad \text{definita da} \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}.$$

(ii) Dal fatto che $\ker(f) \cong S_\Sigma$ segue che

$$\dim(\ker(f)) = \dim(S_\Sigma) = n - \operatorname{rk}(A)$$

dove l'ultima uguaglianza segue da 4.3, Cap. VI.
(iii) Dall'isomorfismo precedente $S_\Sigma \longrightarrow \ker(f)$ segue (per 4.3) che le immagini di una base di S_Σ costituiscono una base di $\ker(f)$. Ovviamente l'intero p dell'enunciato è $n - \operatorname{rk}(A)$. $\square$

5.1.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f((x, y, z)_{\mathcal{B}}) = (x + y - z, x - y + z, 2x)_{\mathcal{C}}$$

dove $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ e $\mathcal{C}$ è la base canonica.
Vogliamo determinare $\ker(f)$ e una sua base, i cui vettori siano espressi sia sulla base $\mathcal{B}$ sia sulla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo la matrice $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Risolviamo il sistema $\Sigma : AX = 0$: riducendo la matrice A per righe si ha

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto lo spazio S_Σ delle soluzioni di Σ è dato da

$$S_\Sigma = \{(0, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0, 1, 1)).$$

Quindi

$$\ker(f) = \{(0, a, a)_{\mathcal{B}} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base è $((0, 1, 1)_{\mathcal{B}})$.
Poiché

$$(0, 1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) = (1, 1, 2)$$

ne segue che *la stessa base* di $\ker(f)$, espressa ora su $\mathcal{E}$, è $((1, 1, 2))$.

5.1.2. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f((x, y, z)) = (x + y - z, x - y + z, 2x).$$

Vogliamo determinare $\ker(f)$. La matrice A associata all'applicazione f è la stessa dello esempio precedente, quindi il sistema $\Sigma : AX = 0$ ha soluzioni $S_\Sigma = \mathcal{L}((0, 1, 1))$.
Poiché $\mathcal{B}$ è la base canonica, $\ker(f) = \mathcal{L}((0, 1, 1)_\mathcal{B}) = \mathcal{L}((0, 1, 1)) = S_\Sigma$.

Per definizione $\ker(f) = f^{-1}(0_W)$, cioè è la controimmagine del vettore nullo del codominio. Vediamo una naturale generalizzazione del metodo per il calcolo del nucleo che permette di determinare la controimmagine di ogni elemento $w \in W$, cioè $f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$.

5.2. Osservazione. Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente, e sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Posta $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, per ogni $w = (y_1, \ldots, y_m)_\mathcal{C} \in W$ si ha

$$f^{-1}(w) = \{(x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B} \in V \mid A^t(x_1, \ldots, x_n) = {}^t(y_1, \ldots, y_m)\}.$$

Infatti, se $v = (x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B}$ allora

$$f(v) = f((x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B}) = (A^t(x_1, \ldots, x_n))_\mathcal{C}.$$

Dunque l'uguaglianza di vettori $f(v) = w$ implica l'uguaglianza delle loro componenti rispetto a $\mathcal{C}$, cioè $A^t(x_1, \ldots, x_n) = {}^t(y_1, \ldots, y_m)$.

Tutto ciò si può interpretare col linguaggio dei sistemi lineari. Infatti, se $w \in W$, la sua controimmagine $f^{-1}(w)$ è costituito dai vettori di V le cui componenti rispetto a $\mathcal{B}$ sono gli elementi dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$, ove B è la colonna delle componenti di w rispetto a $\mathcal{C}$.

5.2.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ come nell'esempio 5.1.1. Vogliamo determinare $f^{-1}(w)$, con $w = (1, 1, 1)$. Quindi risolviamo il sistema $\Sigma : AX = B$, con $B = {}^t(1, 1, 1)$. Operiamo dunque sulla matrice (A, B) per ridurre A:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque Σ non ha soluzioni. Pertanto $w \notin \mathrm{Im}(f)$.
Determiniamo ora $f^{-1}(u)$, con $u = (2, 0, 2)$. Quindi risolviamo il sistema $\Sigma : AX = B$, con $B = {}^t(2, 0, 2)$. Come prima:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

il cui spazio delle soluzioni è, posto $z = a$, $S_\Sigma = \{(1, a + 1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Dunque

$$f^{-1}(2, 0, 2) = \{(1, a + 1, a)_\mathcal{B} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(a + 1, a + 2, 2a + 1) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Vediamo ora come si determina l'immagine di un'applicazione lineare.

5.3. Proposizione (Metodo per il calcolo dell'immagine). *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e sia* $\dim(W) = m$. *Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi qualunque di V e W rispettivamente e $A := M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Allora:*

i) $\mathrm{Im}(f) \cong C(A)$ *attraverso l'isomorfismo* $(y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}} \mapsto (y_1, \dots, y_m)$*;*

ii) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rk}(A)$*;*

iii) se $(w_1, \dots, w_r)$ *è una base di* $C(A)$ *allora* $((w_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (w_r)_{\mathcal{C}})$ *è una base di* $\mathrm{Im}(f)$.

Dimostrazione. *i)* Dalla definizione di immagine e dall'espressione matriciale di una applicazione lineare si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{w \in W \mid w = f(v), \text{per un opportuno } v \in V\} = \\
&= \left\{ w = (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}} \in W \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}} \text{ per opport. } (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V \right\} \\
&= \left\{ (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}} \in W \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ per opport. } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.
\end{aligned}$$

Si vede facilmente, scrivendo A per colonne, cioè $A = (C_1 \ \cdots \ C_n)$, che:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots x_n C_n.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \left\{ (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}} \in W \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots x_n C_n \text{ , per opport. } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}} \in W \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in C(A) \right\}
\end{aligned}$$

Dunque è individuato l'isomorfismo (vedi 4.5)

$$C(A) \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \quad \text{definito da} \quad (y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{C}}.$$

ii) Poiché $\mathrm{Im}(f) \cong C(A)$ si ha ovviamente che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(C(A)) = \mathrm{rk}(A)$.
iii) Segue dall'isomorfismo definito in (*i*) e da 4.3. Ovviamente l'intero r è $\mathrm{rk}(A)$. □

5.4. Osservazione. Al punto (*iii*) del Metodo precedente, bisogna determinare una base di $C(A)$. A tale scopo si può procedere in due modi:

- se si conosce il rango r di A, basta individuare r colonne linearmente indipendenti: queste formano una base per $C(A)$;
- se non si conosce il rango di A, posta A' una matrice ottenuta riducendo A per colonne, una base di $C(A)$ è data dalle r colonne non nulle di A'.

5.4.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{B}$ base canonica e $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$, dove $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,1,1)$, $w_3 = (1,0,1)$.
Riduciamo quindi A per colonne:

$$A \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{C_2 \to C_2 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Poiché A' è ridotta per colonne, le sue colonne non nulle sono una base per lo spazio delle colonne $C(A')$. Dunque $C(A) = C(A') = \mathcal{L}((1,0,2),(0,1,1))$.
Per 2.7 una base di $\mathrm{Im}(f)$ è quindi (u_1, u_2), ove

$$u_1 = (1,0,2)_{\mathcal{C}} = w_1 + 2w_3 = (3,1,2)$$

$$u_2 = (0,1,1)_{\mathcal{C}} = w_2 + w_3 = (1,1,2).$$

In particolare $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \mathrm{rk}(A)$.

Come conseguenza dei risultati precedenti si ha il seguente:

5.5. Teorema. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V).$$

Dimostrazione. Sia A una qualunque matrice associata a f. Per 5.1 $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \mathrm{rk}(A)$; inoltre, per 5.3, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rk}(A)$, da cui la tesi. □

Come immediata conseguenza si ha:

5.6. Corollario (Criterio di isomorfismo). *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e supponiamo che* $\dim(V) = \dim(W)$. *Sono fatti equivalenti:*

i) f è iniettiva;

ii) f è suriettiva;

iii) f è isomorfismo.

Dimostrazione. Ovviamente è sufficiente mostrare $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Osserviamo che f è iniettiva se e solo se $\dim(\ker(f)) = 0$ (per 3.4). Inoltre f è suriettiva se e solo se $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(W)$. La tesi segue immediatamente da 5.5, tenendo conto che $\dim(V) = \dim(W)$ per ipotesi. □

6. Iniettività e suriettività di applicazioni lineari

Studiamo l'iniettività e la suriettività di un'applicazione lineare usando matrici ad essa associate.

6.1. Criterio di iniettività. *Sia* $f : V \longrightarrow W$ *un'applicazione lineare; sono equivalenti:*

i) f *è iniettiva;*

ii) $\mathrm{rk}(A) = \dim(V)$, *per ogni matrice* A *associata ad* f.

Dimostrazione. Applicando 3.4 (i), si ha: f iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0_V\}$ se e solo se $\dim(\ker(f)) = 0$. Inoltre, per 5.1 (iii), vale che $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \mathrm{rk}(A)$, per ogni matrice A associata ad f. Pertanto f è iniettiva se e solo se $\dim(V) - \mathrm{rk}(A) = 0$. □

6.1.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto a due basi fissate. Osserviamo che A è ridotta per colonne, dunque $\mathrm{rk}(A)$ è il numero delle colonne non nulle, cioè $\mathrm{rk}(A) = 3$. D'altro canto $\dim(\mathbb{R}[X]_2) = 3$. Pertanto, per 2.13, f è iniettiva.

Analogamente a quanto visto per l'iniettività di una applicazione lineare, si ha il seguente

6.2. Criterio di suriettività. *Sia* $f : V \longrightarrow W$ *un'applicazione lineare; sono equivalenti:*

i) f *è suriettiva;*

ii) $\mathrm{rk}(A) = \dim(W)$, *per ogni matrice* A *associata ad* f.

Dimostrazione. Immediata da 5.3 (ii). □

6.2.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 2z).$$

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, rispettivamente, allora:

$$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo A per righe:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'.$$

Chiaramente A' è ridotta per righe, dunque $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$ è pari al numero delle righe non nulle di A', cioè $\mathrm{rk}(A) = 2$. D'altro canto $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, quindi, per 2.14, f è suriettiva.

Abbiamo visto in 4.2 che se un'applicazione lineare è un isomorfismo allora il dominio e il codominio hanno la stessa dimensione. Anche le proprietà di iniettività e di suriettività forniscono delle condizioni necessarie in termini di dimensioni del dominio e del codominio. Più precisamente:

6.3. Osservazione. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora:

(a) se f è iniettiva allora $\dim(V) \leq \dim(W)$;

(b) se f è suriettiva allora $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(a) Infatti, per 3.4, le immagini dei vettori di una base di V sono linearmente indipendenti in W.
(b) Analogamente, per 3.3, le immagini dei vettori di una base di V generano W.

Vediamo una specificazione dell'osservazione precedente che usa una qualunque matrice associata a una applicazione lineare.

6.4. Osservazione. Se f è un'applicazione lineare ed A una qualunque matrice associata, allora:

i) se $\dim(V) < \dim(W)$, f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}(A)$ è massimo;

ii) se $\dim(V) > \dim(W)$, f è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}(A)$ è massimo;

iii) se $\dim(V) = \dim(W)$, f è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}(A)$ è massimo.

6.4.1. Esempio. Caratterizzare le seguenti applicazioni lineari:

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ data da $(x, y, z) \mapsto (x-y+2z, y+z, -x+z, 2x+y)$. Posta A la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche, calcoliamo il rango di A riducendola, ad esempio, per righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathrm{rk}(A) = 3$ è massimo e $\dim(V) < \dim(W)$, allora f è iniettiva.

2. $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da $(x, y, z, t) \mapsto (x - y + 2z + t, y + z + 3t, x - y + 2z + 2t)$. Come prima:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathrm{rk}(A) = 3$ è massimo e $\dim(V) > \dim(W)$, quindi f è suriettiva.

3. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Riducendo si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è di rango massimo e poiché $\dim(V) = \dim(W)$, f è un isomorfismo.

7. Composizione di applicazioni lineari

La composizione di applicazioni lineari è la stessa di quella di applicazioni tra insiemi:

7.1. Definizione. Siano $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Si dice *applicazione composta* di g con f, e si indica con $g \circ f$, l'applicazione

$$g \circ f : V \longrightarrow Z$$

definita da: $(g \circ f)(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in V$.

7.2. Proposizione. *L'applicazione composta di due applicazioni lineari è lineare.*

Dimostrazione. Siano f e g come in 7.1. Allora, per ogni $v, v' \in V$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda v + \lambda' v') &= g(f(\lambda v + \lambda' v')) = g(\lambda f(v) + \lambda' f(v')) = \lambda g(f(v)) + \lambda' g(f(v')) = \\ &= \lambda (g \circ f)(v) + \lambda'(g \circ f)(v')\end{aligned}$$

dove la seconda e la terza uguaglianza seguono dalla linearità di f e di g, rispettivamente. $\square$

In termini di matrici vale la seguente proposizione di cui omettiamo la dimostrazione.

7.3. Proposizione. *Siano $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ basi di V, W, Z, rispettivamente. Allora*

$$M_{g \circ f}^{\mathcal{B},\mathcal{D}} = M_g^{\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

$\square$

Diamo un'ulteriore caratterizzazione di isomorfismo in termini di matrici.

7.4. Teorema. *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Sono fatti equivalenti:*

i) *f è un isomorfismo;*

ii) *comunque scelte $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, basi di V e W risp., la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è quadrata invertibile e $\left(M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1} = M_{f^{-1}}^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.*

Dimostrazione. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Poiché f è isomorfismo, $\dim(V)$ è uguale a $\dim(W)$, che indichiamo con n (vedi 4.2). Quindi $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è quadrata. Per ipotesi esiste f^{-1}, anch'essa lineare per 4.2; basta dunque provare che

$$M_{f^{-1}}^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = I_n.$$

Ma per 7.3 si ha: $M_{f^{-1}}^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{f^{-1} \circ f}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Si ponga $A := M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Per ipotesi A è quadrata e invertibile, dunque esiste A^{-1}; si consideri l'applicazione lineare

$$g := f_{A^{-1}}^{\mathcal{C},\mathcal{B}} : W \longrightarrow V.$$

Mostriamo che g è l'inversa di f. Per fare questo, consideriamo la matrice associata a $g \circ f$ rispetto a $\mathcal{B}$ e applichiamo 7.3:

$$M_{g \circ f}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_g^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Pertanto, per la biunivocità tra applicazioni lineari e matrici, abbiamo $g \circ f = id_V$. Analogamente si mostra che $f \circ g = id_W$, pertanto $g = f^{-1}$ come volevamo. $\square$

7.4.1. Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f((x, y, z)) = (x-y+z, 2y+z, z)$. Dopo aver provato che f è invertibile, vogliamo determinare l'applicazione inversa f^{-1}.
Posta $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia

$$A = M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathrm{rk}(A) = 3$, si ha che f è un isomorfismo, quindi invertibile per 4.2 e f^{-1} è l'applicazione lineare associata ad A^{-1}. Calcoliamo la matrice inversa di A con la formula di 7.3, Cap. V:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\alpha_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{f^{-1}}^{\mathcal{E},\mathcal{E}}.$$

8. Cambiamento di base in uno spazio vettoriale

Un problema importante è quello di confrontare le componenti di un vettore rispetto a basi diverse nello stesso spazio vettoriale. Ad esempio, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con le basi

$$\mathcal{E} = (e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)), \qquad \mathcal{B} = (b_1 = (1, 2),\ b_2 = (3, 4)).$$

Un qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^2$ si potrà scrivere in componenti in due modi:

$$v = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2)_{\mathcal{E}} \quad \text{e quindi, esplicitamente:} \quad v = x_1 b_1 + x_2 b_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

Sostituendo le espressioni dei vettori di $\mathcal{B}$ in funzione dei vettori di $\mathcal{E}$, e cioè $b_1 = e_1 + 2e_2$ e $b_2 = 3e_1 + 4e_2$, nella precedente uguaglianza si ottiene

$$x_1(e_1 + 2e_2) + x_2(3e_1 + 4e_2) = y_1 e_1 + y_2 e_2 \quad \Rightarrow \quad (x_1 + 3x_2)e_1 + (2x_1 + 4x_2)e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

Si è determinata dunque l'espressione delle y_i in funzione delle x_j: $y_1 = x_1 + 3x_2$ e $y_2 = 2x_1 + 4x_2$.
Chiaramente si può scrivere anche:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, posta $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, la relazione precedente diventa:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che le colonne di A sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$, rispetto alla base $\mathcal{E}$.

In generale abbiamo la seguente:

8.1. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due sue basi. Denotando con $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ e con $(y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{C}}$ le componenti di un vettore v, rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente, e posta id_V l'applicazione identica di V, si ha*

$$^t(y_1, \dots, y_n) = M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ {}^t(x_1, \dots, x_n).$$

<u>Dimostrazione</u>. Ovviamente $id_V(v) = v$, cioè in termini di matrici:

$$(M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ {}^t(x_1, \dots, x_n))_{\mathcal{C}} = ({}^t(y_1, \dots, y_n))_{\mathcal{C}}$$

quindi sono uguali anche le componenti rispetto a $\mathcal{C}$ di tali vettori di V, ovvero la tesi. □

8.2. Definizione. La matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} := M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{id_V}$ si dice *matrice del cambio di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Si noti che tale matrice ha per colonne le componenti, rispetto a $\mathcal{C}$, dei vettori di $\mathcal{B}$.

8.2.1. Esempio. Siano $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ due basi di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = (0, 1, -1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (2, -2, 2),$$

$$w_1 = (0, 1, 1),\ w_2 = (1, 0, 1), w_3 = (1, 1, 0).$$

Sia $v = (1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$; vogliamo determinare le componenti di v rispetto a $\mathcal{C}$.
A tale scopo costruiamo la matrice associata al cambiamento di base:

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ottenuta risolvendo i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \\ v_3 &= a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \left(M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}.$$

8.3. Teorema. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due sue basi. Allora $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è invertibile e*

$$\left(M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1} = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Basta ricordare che $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{id_V}$; inoltre per 7.4 $\left(M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{id_V}\right)^{-1} = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}_{(id_V)^{-1}}$. Ma $(id_V)^{-1} = id_V$ e ciò prova la tesi. □

8.4. Teorema. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice invertibile. Allora, denotando con $v_1, \ldots, v_n$ i vettori colonna di A e ponendo $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, si ha:*

i) $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^n$;

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, ove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

<u>Dimostrazione</u>. *i*) Per 7.7 A è di rango massimo, cioè $\operatorname{rk}(A) = n$; in particolare i vettori $v_1, \ldots, v_n$, essendo le colonne di A, sono linearmente indipendenti. Ma n vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ sono una sua base (vedi 5.4, Cap. III).
ii) Ovvio. □

8.5. Osservazione. Da 8.3 e da 8.4, segue che le matrici invertibili di ordine n, cioè gli elementi di $GL(n,\mathbb{R})$, sono tutte e sole le matrici di cambiamento di base di $\mathbb{R}^n$.

8.5.1. Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è invertibile, in quanto $\mathrm{rk}(A) = 3$, cioè massimo. Dunque le colonne di A, cioè $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (-1,2,1)$, sono una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}_{id_{\mathbb{R}^3}}$, con $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ e la matrice ad essa associata $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W, è naturale chiedersi come essa cambi al variare delle basi.

Nel seguito useremo una notazione sintetica: nel caso che si operi in V rispetto alla base $\mathcal{B}$, con $V_{\mathcal{B}}$ intenderemo semplicemente lo spazio vettoriale V riferito alla base $\mathcal{B}$.

8.6. Teorema. *Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ basi di W. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare; allora*

$$M_f^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = M^{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Dimostrazione. La situazione si può riassumere col seguente diagramma *commutativo*

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] & W_{\mathcal{C}} \arrow[d, "id_W"] \\ V_{\mathcal{B}'} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & W_{\mathcal{C}'} \end{tikzcd}$$

cioè il "percorso" fatto in un senso equivale a quello fatto nell'altro: più precisamente

$$f = id_W \circ f \circ id_V.$$

In termini di matrici: $M_f^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = M^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}_{id_W \circ f \circ id_V}$. Applicando l'associatività della composizione di applicazioni lineari e 7.3 si ha:

$$M^{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}_{id_W \circ f \circ id_V} = M^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}_{id_W} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}_{id_V}.$$

Dalle due precedenti relazioni si ha la tesi. $\square$

8.6.1. Esempio. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{\mathcal{C}}$ associata alla matrice

$$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\mathcal{B} = ((1,1),(0,1))$ e $\mathcal{C} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$. Determiniamo la matrice $B = M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3}$, dove $\mathcal{E}_2$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}_3$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Il diagramma visto nella dimostrazione di 8.6 diventa dunque:

$$\begin{tikzcd}
{\mathbb{R}^2}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}"] & {\mathbb{R}^3}_{\mathcal{C}} \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
{\mathbb{R}^2}_{\mathcal{E}_2} \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^2}"] \arrow[r, "f_B^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3}"'] & {\mathbb{R}^3}_{\mathcal{E}_3}
\end{tikzcd}$$

Da cui

$$B = M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = M^{\mathcal{C},\mathcal{E}_3}\, A\, M^{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}}.$$

Dobbiamo quindi calcolare $M^{\mathcal{C},\mathcal{E}_3}$ e $M^{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}}$. Si ha immediatamente che

$$M^{\mathcal{C},\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre per determinare $M^{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}}$ basta osservare che, per 8.3, si ha

$$M^{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B},\mathcal{E}_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove l'ultimo passaggio è immediata conseguenza della formula della matrice inversa (vedi 7.3, Cap. V). Quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come applicazione della teoria svolta in questo capitolo, concludiamo con un esempio di costruzione di applicazione lineare:

8.6.2. Esempio. Costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,2) = 0$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}((1,1,0),(2,-1,0))$. Tale applicazione lineare è univocamente determinata?

Poniamo $v_1 = (1,0,2), v_2 = (1,1,0), v_3 = (2,-1,0)$. Poiché f è individuata dai valori che assume su una base del dominio, scegliamo una base opportuna di $\mathbb{R}^3$; ad esempio completiamo v_1 ad una base usando elementi della base canonica. Consideriamo dunque (v_1, e_1, e_2); tale insieme è una base visto che la matrice che ha tali vettori come righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ha rango 3, cosi si vede notando che tale matrice è ridotta per righe. Quindi, poichè $\mathcal{B} = (v_1, e_1, e_2)$ una base di $\mathbb{R}^3$; possiamo determinare f ponendo

$$f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad f(e_1) = v_2, \quad f(e_2) = v_3.$$

Tale applicazione verifica le condizioni richieste, infatti

$$\text{Im}(f) = \mathcal{L}(f(v_1), f(e_1), f(e_2)) = \mathcal{L}(v_2, v_3).$$

Se vogliamo determinare una matrice associata ad f, abbiamo

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci chiediamo adesso se i vettori in questione, cioè v_1, v_2, v_3, formano una base; come prima consideriamo la matrice che ha tali vettori come righe e riduciamola per righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\text{rk}(A) = 3$ e quindi $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Sia g l'applicazione lineare definita da:

$$g(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad g(v_2) = v_2, \quad g(v_3) = v_3.$$

Anche tale applicazione verifica le condizioni richieste; in tal caso, inoltre, è immediato determinare la matrice associata rispetto alla stessa base $\mathcal{C}$:

$$M_g^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sembra chiaro, dal modo come sono state definite, che f e g sono diverse; per verificarlo basta osservare che le matrici associate ad esse rispetto alla *stessa coppia di basi* sono diverse. Determiniamo dunque $M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ e proviamo che $M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ è diversa da $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.

Abbiamo visto che $M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M^{\mathcal{C},\mathcal{E}} M_g^{\mathcal{C},\mathcal{C}} M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ e anche $M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M_g^{\mathcal{C},\mathcal{E}} M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.
Questa seconda uguaglianza ci permette di evitare un prodotto di matrici, in quanto la determinazione di $M_g^{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ è immediata: le sue colonne sono esattamente $g(v_1), g(v_2), g(v_3)$, cioè:

$$M_g^{\mathcal{C},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ ha per colonne le componenti di v_1, e_1, e_2 rispetto a $\mathcal{C}$.
Ovviamente $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$; per i restanti vettori, operiamo come al solito e troviamo $e_1 = 1/3v_2 + 1/3v_3$ ed $e_2 = 2/3v_2 - 1/3v_3$; quindi

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix},$$

quindi

$$M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = M_g^{\mathcal{C},\mathcal{E}} M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque $M_g^{\mathcal{B},\mathcal{E}} \neq M_f^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, quindi $g \neq f$.