Capitolo VI
SISTEMI LINEARI

1. Concetti fondamentali

1.1. Definizione. Un'*equazione* in n incognite $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si dice *lineare* se è della forma:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Una sua *soluzione* è un elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

1.1.1. Esempio. Si verifica facilmente che l'equazione a coefficienti reali

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 1$$

ha come soluzione $(2, 6, 1) \in \mathbb{R}^3$. Si osservi che tale soluzione non è unica.

1.2. Definizione. Un insieme di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si dice *sistema lineare* di m equazioni in n incognite.
Si userà la seguente notazione:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Una *soluzione* di un dato sistema lineare è una n-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di $\mathbb{R}^n$ che è soluzione di ogni equazione del sistema. L'insieme delle soluzioni del sistema Σ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, detto *spazio delle soluzioni* di Σ e denotato con S_Σ.
Un sistema si dirà *compatibile* o *risolubile* se ammette soluzioni (cioè se $S_\Sigma \neq \emptyset$); se invece $S_\Sigma = \emptyset$, si dirà *incompatibile*.

1.3. Esempi. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

ha come soluzione $(1, -1)$. Per contro, non ammette soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Lo scopo di questo capitolo è stabilire se un sistema lineare è compatibile e, in tal caso, determinare tutte le sue soluzioni. A tale fine useremo la teoria delle matrici sviluppata nel Cap. V.

1.4. Definizione. Al sistema lineare Σ si possono associare in modo naturale le seguenti matrici:

1. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, detta *matrice del sistema* o *matrice dei coefficienti* di Σ;
2. $B = {}^t(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m,1}$ detta *matrice dei termini noti.*

Si userà anche la notazione

$$(A, B) = (a_{ij} \,|\, b_i) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

per la *matrice completa* di Σ.
Utilizzando queste matrici, si può rappresentare il sistema Σ nel modo seguente:

$$\Sigma : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, più brevemente,

$$\Sigma : AX = B$$

dove $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ è la *matrice formale delle incognite* (il termine "formale" significa che X non è un elemento di $\mathbb{R}^{n,1}$, ma un simbolo che denota una n-upla di incognite).

1.5. Definizione. Due sistemi lineari Σ e Σ' si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni, cioè, in simboli: $\Sigma \sim \Sigma'$ se $S_\Sigma = S_{\Sigma'}$.

1.6. Osservazione. Siano $AX = B$ e $A'X = B'$ due sistemi lineari nelle stesse variabili; essi sono banalmente equivalenti in uno dei seguenti casi:

i) se la matrice (A', B') si ottiene aggiungendo ad (A, B) delle righe nulle;

ii) se la matrice (A', B') si ottiene permutando le righe di (A, B).

Ad esempio i seguenti sistemi sono chiaramente equivalenti:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

1.7. Osservazione. Si noti che permutando le colonne della matrice A il sistema cambia radicalmente e quindi cambiano le sue soluzioni. Ad esempio, se $AX = B$ è il primo sistema in 1.3. e si scambiano le colonne di A:

$$(A, B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = (A', B),$$

si ottiene il sistema $A'X = B$ del quale $(1, -1)$ non è più soluzione.

2. Risoluzione dei sistemi ridotti

2.1. Definizione. Un sistema lineare $AX = B$ si dice *ridotto* se la sua matrice dei coefficienti A è ridotta per righe.

La risoluzione di un sistema ridotto è particolarmente semplice, come mostrano i seguenti esempi:

2.1.1. Esempio. Il sistema $\Sigma : AX = B$ dato da:

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \quad\ \ y - 2z = -3 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases} \quad \text{con} \quad (A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

è ridotto ed ammette una sola soluzione $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$, come si verifica facilmente sostituendo il valore di $z = 2$ nella seconda equazione, determinando $y = 1$; infine si sostituiscono tali valori di y e z nella prima equazione, ottenendo $x = -1$.

2.1.2. Esempio. Il sistema a coefficienti reali

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y + 2z + t & = & 1 \\ 2x + 3y - z & = & 3 \\ x + \qquad z & = & 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad (A, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

si risolve sostanzialmente come in 2.1.1, partendo dall'ultima equazione $z = -x$. Ponendo $x = \tau$, si determinano le soluzioni, che sono: $(x, y, z, t) = (\tau, -\tau + 1, -\tau, \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$. In tal caso ci sono infinite soluzioni che, più precisamente, corrispondono biiettivamente ad elementi di $\mathbb{R}$.

2.1.3. Esempio. Il sistema $\Sigma : AX = B$ associato alla matrice

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

è chiaramente incompatibile poiché l'ultima equazione risulta essere $0 = 1$.

2.2. Osservazione. Negli esempi 2.1.1 e 2.1.2 si sono "eliminate" le incognite corrispondenti agli elementi speciali selezionati nella matrice A, qui riportati in grassetto, partendo dal basso verso l'alto:

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \text{si elimina } z, \text{ poi } y \text{ e poi } x.$$

Nell'altro esempio

$$(A, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \text{si elimina } z, \text{ poi } y \text{ e poi } t.$$

Gli esempi precedenti suggeriscono, in modo naturale, il seguente

2.3. Metodo delle eliminazioni successive. Sia $\Sigma: \ AX = B$ un sistema ridotto.

1. Per l'osservazione 1.6(i), si può supporre che (A, B) non abbia righe nulle.
2. Se A ha righe nulle, poiché (A, B) non ha righe nulle, Σ avrà equazioni del tipo $0 = b_i$, con $b_i \neq 0$, quindi il sistema è incompatibile, cioè $S_\Sigma = \emptyset$.
3. Se A non ha righe nulle allora $m \leq n$. Quindi, essendo ridotta, ha m elementi speciali (dunque è di rango m). Si eliminano quindi le incognite corrispondenti a tali elementi speciali, partendo dall'ultima equazione e risalendo fino alla prima.

   Per semplicità, vediamo il procedimento esplicito nel caso in cui A è TSC:

$$(A, B) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & * & \dots & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & * & \dots & * & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & * & \dots & * & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & * & \dots & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Osserviamo che l'ultima equazione del sistema $AX = B$ è della forma:

$$a_{mm}x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

con $a_{mm} \neq 0$. Dividendo ambo i membri per a_{mm} , si ricava:

$$x_m = a_{mm}^{-1}(b_m - a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots - a_{mn}x_n);$$

si osservi come x_m risulti espressa in funzione di $x_{m+1}, \dots, x_n$.
Analogamente, dalla penultima equazione, si ricava:

$$x_{m-1} = a_{m-1m-1}^{-1}(b_{m-1} - a_{m-1m}x_m - a_{m-1m+1}x_{m+1} + \cdots - a_{m-1n}x_n).$$

Sostituendo l'espressione di x_m calcolata sopra, si ottiene x_{m-1} in funzione di $x_{m+1}, \dots, x_n$.
Iterando tale procedimento, si ricavano le incognite $x_{m-2}, x_{m-3}, \dots, x_1$ in successione, in funzione delle rimanenti $x_{m+1}, \dots, x_n$.

2.4. Osservazione – Definizione. Nel metodo precedente abbiamo visto che le m incognite $x_1, \dots, x_m$ sono espresse in funzione delle restanti (in numero $n - m$): $x_{m+1}, \dots, x_n$; queste ultime si dicono *incognite libere*. Infatti, ogni qualvolta fissiamo $x_{m+1} = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_{n-m}$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, otteniamo una particolare soluzione del sistema. Questo accade in generale perchè A è ridotta. In tal modo si definisce una corrispondenza biunivoca

$$\mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{1-1} S_\Sigma$$

dove n è il numero delle incognite di Σ e $m = \mathrm{rk}(A)$, il rango di A.
Si dirà anche che il sistema ha ∞^{n-m} soluzioni.

3. Risoluzione dei sistemi lineari generali

Dato un qualunque sistema lineare $AX = B$, uno dei possibili metodi di risoluzione usa il procedimento di riduzione per righe delle matrici. Ricordando la nozione di matrice trasformata per righe data nella Def. 4.1. Cap. V, si ha il seguente.

3.1. Teorema. *Sia $\Sigma : \; AX = B$ un sistema lineare e sia (A', B') una matrice trasformata per righe di (A, B). Allora i sistemi Σ e $\Sigma' : \; A'X = B'$ sono equivalenti.*

<u>Dimostrazione</u>. Come al solito, siano $A = (a_{ij})$ e $B = {}^t(b_1, \ldots, b_m)$.
Se (A', B') è ottenuta da (A, B) con una trasformazione di tipo s, la tesi è ovvia come visto in 1.6.
Se (A', B') è ottenuta da (A, B) con una trasformazione di tipo λ sulla riga R_i, la tesi segue dal fatto che, per ogni $\lambda \neq 0$, l'equazione lineare

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

è equivalente all'equazione

$$\lambda a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i.$$

Sia ora (A', B') ottenuta da (A, B) con una trasformazione di tipo D:

$$R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j$$

con $j \neq i$. Per semplicità, possiamo supporre $i = 2$ e $j = 1$. Dunque

$$(A', B') = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 + \lambda R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}.$$

Sia ora $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una soluzione di Σ, cioè valgono le identità:

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \qquad (*_i)$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$. E' chiaro che α è soluzione di tutte le equazioni di Σ', eccetto al più la seconda. Basta quindi provare che α verifica

$$(a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + \cdots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1.$$

A tale scopo si sommino, membro a membro, l'eguaglianza $(*_2)$ e λ volte $(*_1)$, ottenendo:

$$(a_{21} + \lambda a_{11})\alpha_1 + \cdots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})\alpha_n = b_2 + \lambda b_1.$$

Pertanto $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è soluzione di Σ', quindi $S_\Sigma \subseteq S_{\Sigma'}$. In modo analogo si prova $S_{\Sigma'} \subseteq S_\Sigma$. $\square$

Usando il teorema precedente si arriva al *metodo di eliminazione di Gauss*, o anche *algoritmo di Gauss*, per la risoluzione di un sistema lineare generale.

3.2. Metodo di risoluzione dei sistemi lineari.
Dato il sistema lineare $\Sigma : \; AX = B$, per determinare S_Σ si procede come segue:

1. *Si riduce per righe la matrice (A, B), ottenendo la matrice (A', B'), con A' ridotta per righe.*
2. *Si determina lo spazio delle soluzioni $S_{\Sigma'}$ di $\Sigma' : \; A'X = B'$ (usando il metodo di risoluzione dei sistemi ridotti).*
3. *Per 3.1, $\Sigma \sim \Sigma'$, cioè $S_\Sigma = S_{\Sigma'}$.*

3.2.1. Esempio. Risolviamo il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y + z & = & 1 \\ x - y - z & = & 0 \\ x + 2y + 2z & = & 1 \end{cases} .$$

Riducendo per righe la matrice completa

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

si ha:

$$(A, B) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A', B').$$

Poiché A' è ridotta, il sistema $\Sigma' : A'X = B'$ è ridotto e quindi risolubile col metodo delle eliminazioni successive:

$$\Sigma' : \begin{cases} 2x + y + z & = & 1 \\ 3x & = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y + z & = & 1/3 \\ x & = & 1/3 \end{cases} .$$

E' chiaro che tale sistema ha una sola incognita libera e dunque il sistema ha ∞^1 soluzioni; si può scegliere, ad esempio, z e in tal caso, ponendo $z = \lambda$, lo spazio delle soluzioni di Σ ha la forma:

$$S_\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (1/3, 1/3 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Se, invece, si sceglie y come incognita libera, posto $y = \alpha$, lo spazio delle soluzioni di Σ ha la forma:

$$S_\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (1/3, \alpha, 1/3 - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Ovviamente le due espressioni precedenti rappresentano, in modi diversi, lo stesso sottoinsieme S_Σ di $\mathbb{R}^3$. Si noti che il numero delle incognite libere coincide con la differenza tra il numero delle incognite ed il rango di A.

3.2.2. Esempio. Risolviamo il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \end{cases} .$$

Riducendo per righe la matrice completa

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

si ha:

$$(A, B) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A', B').$$

Poiché A' è ridotta, il sistema $\Sigma' : A'X = B'$ è ridotto; inoltre il numero delle incognite libere è zero, dunque Σ', e quindi Σ, ha $\infty^0 = 1$ soluzione. Come al solito possiamo determinarla col metodo delle eliminazioni successive:

$$\Sigma' : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad - 3y + 2z = 1 \\ \quad 4y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - z = -1/4 \\ 2z = 7/4 \\ y = 1/4 \end{cases}$$

da cui $(x, y, z) = (5/8, 1/4, 7/8)$. Ancora una volta si noti che il numero delle incognite libere è dato da $3 - \mathrm{rk}(A) = 0$, dove 3 è il numero delle incognite.

L'esempio seguente riguarda la discussione di un sistema con parametro: i coefficienti non sono numeri reali, come nei casi visti in precedenza, ma possono contenere un simbolo (parametro) che varia in $\mathbb{R}$. La discussione di tali sistemi consiste nel determinare tutti i valori del parametro per i quali il sistema è risolubile e nel trovare tutte le soluzioni del sistema in corrispondenza di tali valori.

3.2.3. Esempio. Discutere il seguente sistema lineare nel parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x + 2y + z + t = -1 \\ x + y - z + 2t = 1 \\ 2x + \lambda y + \lambda t = 0 \\ \quad - \lambda y - 2z + \lambda t = 2 \end{cases}.$$

Se si vuole risolvere il sistema con il solito metodo della riduzione per righe, bisogna fare attenzione quando vengono usate espressioni che coinvolgono il parametro λ:

$$(A, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 & \lambda & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 4 & -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 & \lambda & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & -\lambda + 1 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{array}\right) = (A', B').$$

A questo punto è utile eliminare da una delle ultime due righe il parametro λ. Ad esempio, operando la trasformazione $R_3 \to R_3 + R_4$ e, successivamente (dopo aver ulteriormente diviso la terza riga per 2), $R_4 \to R_4 + (1 - \lambda)R_3$, la matrice (A', B') diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -\lambda + 1 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{array}\right)$$

dove $a_{44} = (1 - \lambda)(\lambda - 3)$. Si osservi che l'ultima trasformazione effettuata è corretta per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti l'unico caso dubbio si ha per $\lambda = 1$, per il quale la trasformazione diventa $R_4 \to 2R_4$, che è ancora accettabile.
Si noti ora che $a_{44} = 0$ se e solo se $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 3$.
Si conclude dunque che Σ_λ è sempre risolubile per 2.2; inoltre:

- $\lambda = 1, 3 \Rightarrow a_{44} = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A) = 3 \Rightarrow \Sigma_\lambda$ ha ∞^1 soluzioni;
- $\lambda \neq 1, 3 \Rightarrow a_{44} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A) = 4 \Rightarrow \Sigma_\lambda$ ha una sola soluzione.

Risolviamo dunque i 3 sistemi lineari:

I) $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 3$

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x + 2y + z + t = -1 \\ \quad - y - 2z + t = 2 \\ \quad - y + (\lambda - 2)t = 0 \\ \quad (\lambda - 3)(\lambda - 1)t = 0 \end{cases}.$$

Come già osservato, tale sistema ammette un'unica soluzione per ogni λ in $\mathbb{R}$. Possiamo determinarla col metodo delle eliminazioni successive: poiché $(\lambda-3)(\lambda-1) \neq 0$, possiamo dividere l'ultima equazione per $(\lambda - 3)(\lambda - 1)$ e dunque ottenere $t = 0$; risalendo le equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -1 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

In questo esempio specifico l'unica soluzione di ogni sistema Σ_λ, che in generale varia con il parametro, non dipende da λ.

II) $\lambda = 1$
In questo caso l'ultima equazione si riduce all'identità $0 = 0$ e quindi viene eliminata. Si ha quindi il sistema particolare:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x + 2y + z + t = -1 \\ \quad - y - 2z + t = 2 \\ \quad y + t = 0 \end{cases}.$$

Ancora col metodo delle eliminazioni successive si ottiene:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = t - 1 \\ y = -t \end{cases}.$$

quindi le soluzioni del sistema hanno la forma

$$(x, y, z, t) = (0, -\alpha, \alpha - 1, \alpha).$$

III) $\lambda = 3$
Anche in questo caso l'ultima equazione si riduce all'identità $0 = 0$ e quindi viene eliminata. Si ha quindi il sistema particolare:

$$\Sigma_3 : \begin{cases} x + 2y + z + t = -1 \\ \quad - y - 2z + t = 2 \\ \quad - y + t = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -3t \\ z = -1 \\ y = t \end{cases}$$

pertanto le soluzioni di Σ_3 : sono $(x, y, z, t) = (-3\alpha, \alpha, -1, \alpha)$.

Riassumiamo quanto detto precedentemente nel seguente teorema, che fornisce un criterio generale di risolubilità dei sistemi lineari.

3.3. Teorema. *(Rouché–Capelli). Dato il sistema lineare* $\Sigma : AX = B$*, si ha:*

a) Σ *ha soluzioni se e solo se* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, B)$.

Nel caso in cui il sistema abbia soluzioni, posti $\rho := \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, B)$ *e* n *il numero delle incognite di* Σ*, si hanno i seguenti fatti:*

b) le incognite libere sono $n - \rho$*;*

c) le $n - \rho$ *incognite libere vanno scelte in maniera tale che le restanti corrispondano a* ρ *colonne di* A *linearmente indipendenti.*

<u>Dimostrazione</u>. *a*) Osserviamo dapprima che il sistema Σ si può scrivere come

$$x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne di A. Pertanto il sistema è risolubile se e solo se B è combinazione lineare di $C_1, \ldots, C_n$ se e solo se lo spazio delle colonne di A coincide con quello di (A, B). Quindi Σ è risolubile se e solo se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, B)$.

b) Sia $\Sigma' : A'X = B'$ il sistema ridotto ottenuto riducendo (A, B) per righe. Per 2.4. Σ' ha $n - \mathrm{rk}(A')$ incognite libere. Essendo Σ e Σ' equivalenti e $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$, ne segue la tesi.

c) Cambiando eventualmente l'ordine delle incognite, ci si può ricondurre a provare che, posta $A = (C_1, \ldots, C_n)$, allora

$$x_{\rho+1}, \ldots, x_n \text{ sono libere } \Leftrightarrow\ C_1, \ldots, C_\rho \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Supponiamo dapprima che $C_1, \ldots, C_\rho$ siano linearmente indipendenti.
Posto $\overline{A} = (C_1, \ldots, C_\rho)$, riducendo opportunamente (A, B) per righe (scegliendo gli elementi speciali in $\overline{A}$), permutando eventualmente le equazioni e le prime ρ incognite, tenuto conto del fatto che

$$\mathrm{rk}(\overline{A}) = \mathrm{rk}(A, B) = \rho,$$

la matrice del sistema ottenuto è della forma:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\rho} & * & \ldots & * & b_1 \\
0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\rho} & * & \ldots & * & b_2 \\
0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3\rho} & * & \ldots & * & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_{\rho\rho} & * & \ldots & * & b_\rho \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Con il metodo dell'eliminazione successiva si ha la tesi.
Viceversa, siano $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ incognite libere e supponiamo per assurdo che $C_1, \ldots, C_\rho$ siano linearmente dipendenti. Dunque la matrice $\overline{A}$ ha rango minore di ρ; pertanto riducendo opportunamente (A, B) per righe (scegliendo gli elementi speciali in $\overline{A}$), permutando eventualmente le equazioni, la

matrice del sistema ottenuto è della forma:

$$(A', B') = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\rho} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\rho-1\,1} & \dots & a_{\rho-1\,\rho} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathrm{rk}(A', B') = \mathrm{rk}(A, B) = \rho$, esiste una riga non nulla R_i di (A', B'), con $i \geq \rho$. L'equazione corrispondente, non comprendendo le prime ρ incognite, fornisce una relazione tra $x_{\rho+1}, \dots, x_n$, che pertanto non sono libere. $\square$

3.4. Osservazione. Se il sistema lineare di m equazioni in n incognite $AX = B$ è risolubile di rango ρ, allora:

i) esso è equivalente ad un sistema costituito da ρ equazioni comunque scelte fra le m equazioni iniziali, purché linearmente indipendenti;

ii) l'insieme delle soluzioni è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^{n-\rho}$.

3.4.1. Esempio. Discutere il seguente sistema lineare nel parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} \lambda x & & & + & z & = & -1 \\ x & + & (\lambda-1)y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & (\lambda-1)y & + & 3z & = & 0 \end{cases}.$$

Riducendo per righe la matrice completa:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1-2\lambda & \lambda-1 & 0 & 3 \\ 1-3\lambda & \lambda-1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1-2\lambda & \lambda-1 & 0 & 3 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A', B').$$

Se $\lambda = 1$, la matrice A' non è ridotta, dunque bisogna completare la riduzione.
Se $\lambda \neq 1$, la matrice A' è ridotta e si hanno i due casi:
$I)$ $\lambda \neq 0$: $\mathrm{rk}(A) = 3 = \mathrm{rk}(A, B) \Rightarrow$ una sola soluzione.
$II)$ $\lambda = 0$: $\mathrm{rk}(A) = 2 = \mathrm{rk}(A, B) \Rightarrow \infty^1$ soluzioni.
Le soluzioni sono dunque:

$I)$ $\lambda \neq 1, \lambda \neq 0$:

$$\Sigma' : \begin{cases} \lambda x & & & + & z & = & -1 \\ (1-2\lambda)x & + & (\lambda-1)y & & & = & 3 \\ -\lambda x & & & & & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z & = & -1 \\ y & = & 3/(\lambda-1) \\ x & = & 0 \end{cases}$$

dunque (per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$) il sistema ha un'unica soluzione:
$(x, y, z) = (0, 3/(\lambda-1), -1)$.

$II)$ $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} \quad\quad z = -1 \\ x - y \quad = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ x = y+3 \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni sono $(x, y, z) = (\alpha + 3, \alpha, -1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$III)$ $\lambda = 1$. Dobbiamo completare la riduzione:

$$(A', B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente l'ultima equazione è $0 = -3$, dunque il sistema è incompatibile.

3.4.2. Esempio. Verificare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1)$$

e inoltre esprimere $v = (1, 1, 1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Osserviamo che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se e solo se il rango della matrice avente tali vettori come colonne è 3. Calcoliamo dunque tale rango:

$$(v_1\, v_2\, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è ridotta per righe ed ha 3 righe non nulle, dunque il suo rango è 3.
In particolare v_1, v_2, v_3 sono 3 vettori indipendenti in $\mathbb{R}^3$, quindi sono una base. Pertanto esiste un'unica terna di coefficienti x, y, z tali che

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Tale terna corrisponde all'unica soluzione del sistema lineare avente come matrice completa $(A, B) = (v_1\, v_2\, v_3\, v)$. In questo caso particolare

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Riducendo come per righe usando la riduzione di A fatta precedentemente si ha:

$$(A, B) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x \quad + z = 1 \\ \quad y - z = 0 \\ \quad\quad 2z = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ z = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

infatti $1/2(1, 1, 0) + 1/2(0, 1, 1) + 1/2(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$.

3.4.3. Esempio. Sia data la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcolare, quando esiste, M_λ^{-1}, usando i sistemi lineari.

In questo caso, poiché la matrice data è 2×2, si può risolvere direttamente il sistema:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\Sigma : \begin{cases} \lambda x & & + & z & & & = & 1 \\ x & & + & \lambda z & & & = & 0 \\ & \lambda y & & & + & t & = & 0 \\ & y & & & + & \lambda t & = & 1 \end{cases}.$$

Da cui, riducendo la matrice del sistema:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \lambda R_1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - \lambda R_3} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A', B').$$

Si noti che le trasformazioni di tipo D) effettuate sopra sono ammissibili per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti, se $\lambda = 0$, lasciano le matrici inalterate. Infine è chiaro che, se $1 - \lambda^2 \neq 0$, allora la matrice (A', B') è ridotta ed inoltre il sistema è risolubile in quanto $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, B) = 4$. In tal caso esiste una sola soluzione (infatti l'inversa di una matrice è unica).
Poniamo dunque $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$. Il sistema ridotto è:

$$\Sigma' : \begin{cases} \lambda x & & + & z & & & = & 1 \\ (1-\lambda^2)x & & & & & & = & -\lambda \\ & \lambda y & & & + & t & = & 0 \\ & (1-\lambda^2)y & & & & & = & 1 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} z & = & 1/(1-\lambda^2) \\ x & = & -\lambda/(1-\lambda^2) \\ t & = & -\lambda/(1-\lambda^2) \\ y & = & 1/(1-\lambda^2) \end{cases}.$$

Pertanto

$$M_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda/(1-\lambda^2) & 1/(1-\lambda^2) \\ 1/(1-\lambda^2) & -\lambda/(1-\lambda^2) \end{pmatrix}.$$

Sia ora $1 - \lambda^2 = 0$, cioè $\lambda = \pm 1$; la matrice (A', B') diventa

$$(A', B') = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dall'ultima equazione segue che il sistema è incompatibile. Abbiamo quindi provato che M_λ^{-1} esiste (e l'abbiamo ricavata) se e solo se $\lambda \neq \pm 1$.

4. Sistemi lineari omogenei

Una classe interessante di sistemi lineari è costituita dai sistemi lineari omogenei.

4.1. Definizione. Un sistema lineare $AX = B$ si dice *omogeneo* se le equazioni che lo costituiscono sono omogenee, cioè se $B = 0$.

4.2. Osservazione. Un sistema lineare omogeneo $AX = 0$, con A in $\mathbb{R}^{m,n}$, è sempre risolubile; infatti la n-upla nulla è soluzione di tutte le equazioni. A tale fatto si perviene anche applicando il teorema di Rouché–Capelli; infatti $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, 0)$. Inoltre, sempre per tale teorema, la n-upla nulla è l'unica soluzione se e solo se $n = \rho$, ove ρ denota $\mathrm{rk}(A)$, il rango di A.

4.3. Teorema. *Sia $\Sigma : \ AX = 0$ un sistema lineare omogeneo, con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Allora S_Σ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rk}(A)$.*

Dimostrazione. Per il criterio di sottospazio vettoriale, basta provare che, se $X_1, X_2 \in S_\Sigma$ e se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora la combinazione lineare $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ appartiene a S_Σ . Per ipotesi $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$, dunque $\lambda_1(AX_1) + \lambda_2(AX_2) = 0$. Per le proprietà del prodotto e somma di matrici $\lambda_1(AX_1) + \lambda_2(AX_2) = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$, quindi $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ è soluzione di $AX = 0$. Pertanto S_Σ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
Per il teorema di Rouché–Capelli, posto come al solito $\rho := \mathrm{rk}(A)$, il sistema Σ ha $n - \rho$ incognite libere; proviamo che tale numero coincide con la la dimensione dello spazio S_Σ, determinandone esplicitamente una base di $n - \rho$ elementi. Per semplicità, supponiamo che le incognite libere siano le ultime, cioè $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$; dunque ogni soluzione ha la forma

$$(*, \ldots, *, x_{\rho+1}, \ldots, x_n)$$

dove i ρ asterischi sono i valori di $x_1, \ldots, x_\rho$ "calcolati" per ogni scelta di $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$.
Si scelga ora la $(n - \rho)$–upla $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ in tutti i modi possibili nella base canonica di $\mathbb{R}^{n-\rho}$ e si considerino i corrispondenti elementi di S_Σ:

$$\begin{aligned} v_1 &:= (*, \ldots, *, 1, 0, \ldots, 0) \\ v_2 &:= (*, \ldots, *, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ v_{n-\rho} &:= (*, \ldots, *, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}.$$

Chiaramente la matrice che ha per righe tali vettori ha rango $n - \rho$ (in quanto le ultime $n - \rho$ colonne sono linearmente indipendenti), dunque le sue righe, cioè $v_1, \ldots, v_{n-\rho}$, sono linearmente indipendenti. Si vede facilmente che tali vettori sono anche un sistema di generatori di S_Σ e quindi sono una sua base. Ciò prova che $\dim(S_\Sigma) = n - \rho$. □

Per risolvere un sistema lineare omogeneo si procede, come nel caso generale, mediante la riduzione della matrice associata dei coefficienti. A differenza del caso generale, poiché lo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, è anche interessante determinarne una base. Dalla dimostrazione di 4.3, si deduce un modo semplice per determinare tale base: si attribuiscono, successivamente, alle $n - \rho$ incognite libere i valori corrispondenti alla base canonica di $\mathbb{R}^{n-\rho}$.

4.3.1. Esempio. Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo, determinando una base del suo spazio delle soluzioni:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & 2x_5 & + & 2x_6 & = 0 \end{cases} .$$

Riducendo la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A'.$$

Si osservi che $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = 3$. Inoltre, poiché le prime 3 colonne di A' (e quindi di A) sono linearmente indipendenti, per il teorema di Rouché–Capelli si possono scegliere x_4, x_5, x_6 come incognite libere. Chiaramente Σ è equivalente a $\Sigma' : A'X = 0$ e quindi basta risolvere

$$\Sigma' : \begin{cases} x_1 & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = 0 \\ & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & & & = 0 \\ & & & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = a$, $x_5 = b$, $x_6 = c$ si ottiene lo spazio delle soluzioni

$$S_\Sigma = \{(x_1, ..., x_6) = (-2a + b - 3c, -b - c, -a + b - c, a, b, c) \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Per determinare una base di S_Σ basta far variare (a, b, c) tra i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ (in quanto qui $n - \rho = 6 - 3 = 3$) ottenendo la base di S_Σ:

$$\begin{array}{lll} v_1 & := & (-2, \;\; 0, \; -1, \; 1, \; 0, \; 0) \\ v_2 & := & (\;\; 1, \; -1, \;\; 1, \; 0, \; 1, \; 0) \\ v_3 & := & (-3, \; -1, \; -1, \; 0, \; 0, \; 1) \end{array}.$$