Capitolo V
MATRICI

1. Concetti fondamentali

Le matrici sono uno strumento fondamentale nell'algebra lineare (sistemi lineari e applicazioni lineari, ad esempio) e in geometria (intersezioni di rette e piani, coniche e quadriche, ad esempio).

1.1. Definizione. Si dice *matrice* a elementi in $\mathbb{R}$ un insieme di scalari $a_{ij} \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $m, n \in \mathbb{N}$, rappresentato da una tabella del tipo

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

•) La matrice M in (1) rappresenta sia m vettori "riga" di $\mathbb{R}^n$:

$$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \ , \quad \dots \ , \quad R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

sia n vettori "colonna" di $\mathbb{R}^m$:

$$C_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1}) \ , \quad \dots \ , \quad C_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

I vettori R_i si dicono anche *righe* di M e i vettori C_j si dicono anche *colonne* di M.

•) Si dirà che M è una matrice a m *righe* e n *colonne* (o brevemente di tipo $m \times n$) e si scriverà $M = (a_{ij})$, ove a_{ij} è l'elemento appartenente all'i-esima riga e alla j-esima colonna.
L'insieme di tutte le matrici di tipo $m \times n$ si denota con $\mathbb{R}^{m,n}$.

1.2. Notazione. Può tornare utile scrivere una matrice $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ come la riga delle sue colonne o la colonna delle sue righe:

$$M = (C_1 \ \ C_2 \ \ \dots \ \ C_n) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}.$$

–) Se $m = 1$, $M \in \mathbb{R}^{1,n}$ si dice *matrice riga* e ha la forma

$$M = (a_{11} \ \ a_{12} \ \ \dots \ \ a_{1n});$$

se $n = 1$, $M \in \mathbb{R}^{m,1}$ si dice *matrice colonna* e ha la forma

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

–) Se $m = n = 1$, la matrice si riduce ad un elemento di $\mathbb{R}$. Più in generale, se $m = n \geq 1$, la matrice si dirà *quadrata* di ordine n.
Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice quadrata, allora gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la *diagonale principale* o, più brevemente, la *diagonale* di A.

1.2.1. Esempio. Gli elementi in grassetto della seguente matrice formano la sua diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 \\ -1 & \mathbf{0} & 3 \\ 2 & 4 & \mathbf{7} \end{pmatrix}.$$

1.3. Proposizione. *L'insieme $\mathbb{R}^{m,n}$ è di tutte le matrici $m \times n$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione mn con le operazioni seguenti: per ogni $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce*

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}); \qquad \lambda A := (\lambda a_{ij}).$$

Dimostrazione. *Lasciamo al lettore la verifica del fatto che $\mathbb{R}^{m,n}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, osservando che lo zero di $\mathbb{R}^{m,n}$ è dato dalla matrice i cui elementi sono tutti uguali a $0_{\mathbb{R}}$, detta* matrice nulla. *Per provare che $\dim(\mathbb{R}^{m,n}) = mn$, si considerino le seguenti matrici:*

$$E_{rs} = (e_{jk}^{(rs)}) \ , \quad \text{dove } e_{jk}^{(rs)} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j,k) = (r,s) \ ; \\ 0, & \text{se } (j,k) \neq (r,s) \ . \end{cases}$$

Cioè E_{rs} è la matrice i cui elementi sono tutti zero eccetto quello di posto rs, che è uguale a 1. Si verifica facilmente che $\{E_{rs} \mid 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n\}$ è una base per $\mathbb{R}^{m,n}$ e che è costituita da mn elementi. □

1.3.1. Esempio. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ due matrici di $\mathbb{R}^{2,2}$. Per definizione

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m,n}$ si può definire un'ulteriore operazione:

1.4. Definizione. Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n,p}$ si definisce *prodotto* di A e B la matrice

$$C = (c_{ik}) = AB \in \mathbb{R}^{m,p} \ , \quad \text{ove } c_{ik} = R_i^A \cdot C_k^B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

con $i = 1, \dots, m$ e $k = 1, \dots, p$, dove $R_i^A \cdot C_k^B$ denota il prodotto scalare (di vettori in $\mathbb{R}^n$) dello i-esimo vettore riga R_i^A di A per il k-esimo vettore colonna C_k^B di B.

1.5. Osservazione. Chiaramente il prodotto AB, chiamato anche prodotto righe per colonne, è definito solo se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B, cioè se e solo se A è di tipo $m \times n$ e B è di tipo $n \times p$. Il risultato AB è ovviamente una matrice di tipo $m \times p$.

1.5.1. Esempio. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2};$$

allora $AB = C = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{2,2}$ è tale che $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 2$, e così via. Dunque,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.6. Osservazione. Si considerino le matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$. Come già osservato, il prodotto AB è definito; affinché il prodotto BA sia definito è necessario che sia $p = m$. Ma, anche se fosse definito, il prodotto tra matrici non è commutativo, cioè, se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, in generale $AB \neq BA$. Infatti ciò è ovvio se $n \neq m$. Altrimenti, siano ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mentre $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

L'associatività e la distributività rispetto alla somma del prodotto in $\mathbb{R}$ garantiscono analoghe proprietà del prodotto di matrici.

1.7. Proposizione. *Il prodotto di matrici è associativo e distributivo rispetto alla somma, ovvero*

i) $A(BC) = (AB)C, \quad \forall \; A \in \mathbb{R}^{m,n},\ B \in \mathbb{R}^{n,p},\ C \in \mathbb{R}^{p,q}$;

ii) $A(B + C) = AB + AC, \quad \forall \; A \in \mathbb{R}^{m,n},\ B, C \in \mathbb{R}^{n,p}$.

Inoltre vale la proprietà

iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\quad \forall \; A \in \mathbb{R}^{m,n},\ B \in \mathbb{R}^{n,p},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. *i)* Siano date le matrici $A = (a_{ih}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{hk}) \in \mathbb{R}^{n,p}$ e $C = (c_{kj}) \in \mathbb{R}^{p,q}$. Vogliamo provare che $(AB)C = A(BC)$. Dalla definizione di prodotto si ha: $AB = (d_{ik})$, ove $d_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk}$ e $BC = (e_{hj})$, ove $e_{hj} = \sum_{k=1}^{p} b_{hk}c_{kj}$.
Dunque l'elemento di posto ij di $(AB)C$ è

$$\sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{h=1}^{n} (a_{ih}b_{hk}c_{kj})$$

con l'ultima uguaglianza che discende dalla distributività del prodotto rispetto alla somma (in $\mathbb{R}$).
D'altro canto, l'elemento di posto ij di $A(BC)$ risulta uguale al precedente, in quanto è

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih}e_{hj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{hk}c_{kj} \right) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} (a_{ih}b_{hk}c_{kj}).$$

ii) Siano date le matrici $A = (a_{ih}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{hj}), C = (c_{hj}) \in \mathbb{R}^{n,p}$. Per provare che $A(B+C) = AB + AC$, mostriamo che i rispettivi elementi di posto ij sono uguali.

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}(b_{hj} + c_{hj}) = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj} + \sum_{h=1}^{n} a_{ih}c_{hj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

come volevamo.

iii) Viene lasciata al lettore. □

Il prodotto tra matrici ammette un elemento neutro:

1.8. Definizione. Si dice *matrice identica* di ordine n, indicata con I_n, la matrice quadrata definita da:

$$I_n = (\delta_{ij}) \ , \quad \text{dove } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \ ; \\ 0, & \text{se } i \neq j \ . \end{cases}$$

Ovvero gli elementi di I_n sono tutti nulli, eccetto quelli della diagonale, che sono uguali a 1.

1.9. Osservazione. Si verifica facilmente che, se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora

$$AI_n = A \qquad \text{e} \qquad I_m A = A.$$

1.10. Proposizione. *L'insieme $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n, con le operazioni di somma e prodotto sopra definite, è un anello (non commutativo).*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^{n,n}$ è chiuso rispetto al prodotto, in quanto se $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora AB e BA sono definite e sono ancora matrici $n \times n$. Poiché $\mathbb{R}^{n,n}$ è un gruppo rispetto alla somma, per 1.3, e valgono le proprietà associativa e distributiva per 1.7, si ha la tesi. □

Ricordiamo che in un anello si dà in generale la nozione di elemento invertibile.

1.11. Definizione. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *invertibile* se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AB = BA = I_n$. In tal caso B si denota con A^{-1} e si dice *inversa* di A.

Nell'anello $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n, non tutti gli elementi hanno inversa. Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

è invertibile con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invece la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

non è invertibile. Infatti, si verifica che l'"equazione matriciale"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non ha soluzione.

1.12. Proposizione - Definizione. *L'insieme delle matrici invertibili di* $\mathbb{R}^{n,n}$ *è un gruppo rispetto al prodotto di matrici. Tale gruppo si dice gruppo lineare di ordine* n *e si denota con* $GL(n, \mathbb{R})$ *o anche con* $GL(n)$.

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che $GL(n)$ è chiuso rispetto al prodotto di matrici. Se A e B sono invertibili, anche AB è invertibile, poiché ammette inversa, che è $B^{-1}A^{-1}$.
Infatti, per l'associatività del prodotto: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Dunque $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
E' chiaro che $I_n \in GL(n)$, in quanto $I_n^{-1} = I_n$. Inoltre I_n è l'elemento neutro di $GL(n)$.
Infine, se $A \in GL(n)$, allora $A^{-1} \in GL(n)$; infatti l'inversa di A^{-1} è A. □

Si noti che $GL(n)$ non è commutativo: ad esempio si può verificare che le matrici A e B dell'osservazione 1.6 sono invertibili, quindi $A, B \in GL(n)$, ma $AB \neq BA$.

In seguito vedremo come sia utile al fine di semplificare alcune dimostrazioni associare ad una matrice A una matrice da essa ottenuta scambiando le righe con le colonne. Più precisamente:

1.13. Definizione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$; si dice *trasposta* di A e si indica con ${}^tA$ la matrice ${}^tA = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,m}$, dove $b_{ij} = a_{ji}$.

1.13.1. Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e ${}^tA \in \mathbb{R}^{3,2}$.

Nella seguente proposizione diamo alcune proprietà delle matrici trasposte.

1.14. Proposizione. *Valgono i seguenti fatti:*

i) *se* $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ *allora:* ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;

ii) *se* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ *e se* $B \in \mathbb{R}^{n,p}$, *allora* ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$;

iii) *se* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *e* A *è invertibile, allora anche* ${}^tA$ *è invertibile e vale* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Dimostrazione. *i)* Ovvio.
ii) Si ponga $AB = (c_{ij})$, ${}^tA = (a'_{ij})$ e ${}^tB = (b'_{ij})$. Allora $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$, $a'_{ij} = a_{ji}$ e $b'_{ij} = b_{ji}$. L'elemento di posto ij di ${}^t(AB)$ è dunque $\sum_{h=1}^{n} a_{jh}b_{hi}$; l'elemento di posto ij di ${}^tB\,{}^tA$ è $\sum_{h=1}^{n} b'_{ih}a'_{hj}$; chiaramente tali elementi coincidono, per ogni i e j.
iii) E' sufficiente provare che ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = I_n$. Per *ii)*

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(I_n) = I_n.$$

□

1.15. Definizione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata. La matrice A si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta: ${}^tA = A$, ovvero se per ogni i, j, gli elementi a_{ij} e a_{ji} coincidono.

1.15.1. Esempio. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ è simmetrica: ${}^tA = A$.

2. Rango di una matrice

Il rango di una matrice è una misura dell'indipendenza lineare dei suoi vettori righe o, in modo equivalente, dei suoi vettori colonna. La nozione di rango è fondamentale, non solo in quanto invariante di una matrice, ma anche per le possibili applicazioni.

2.1. Definizione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Abbiamo visto che le m righe di A:

$$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad \dots \quad , R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

si possono interpretare come elementi di $\mathbb{R}^n$. Si dice *spazio delle righe* di A, e si indica con $R(A)$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori $R_1, \dots, R_m$, cioè

$$R(A) = \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m).$$

Analogamente, dette

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

le colonne di A, lo *spazio delle colonne* di A è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ definito da

$$C(A) = \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n).$$

2.2. Osservazione. E' evidente che lo spazio delle righe di una matrice A è uguale allo spazio delle colonne di ${}^tA$ e viceversa.

2.3. Teorema. *Sia* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. *Allora* $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$.

Dimostrazione. Per semplicità poniamo $R := R(A)$ e $C := C(A)$.
Proviamo dapprima che, se $\dim(R) = r$, allora deve essere $\dim(C) \leq r$. A meno di permutazione delle righe, si può supporre che le prime r righe $R_1, \dots, R_r$ siano linearmente indipendenti; dunque le restanti sono loro combinazioni lineari. Pertanto la matrice A ha la forma:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_r \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^{r+1} R_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^m R_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^{r+1} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^r \lambda_i^{r+1} a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^m a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^r \lambda_i^m a_{in} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, per ogni $h = 1, \dots, n$, la h-esima colonna è della forma:

$$C_h = \begin{pmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \vdots \\ a_{rh} \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^{r+1} a_{ih} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^m a_{ih} \end{pmatrix} = a_{1h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1^{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_1^m \end{pmatrix} + \cdots + a_{rh} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_r^{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_r^m \end{pmatrix}.$$

Dunque C è generato dalle r colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1^{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_1^m \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_r^{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_r^m \end{pmatrix}.$$

pertanto $\dim(C) \leq r$. L'altra disuguaglianza $\dim(C) \geq \dim(R)$ si dimostra in modo del tutto analogo, scambiando le righe con le colonne e quindi si ha la tesi. □

Ne segue che $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$ è un invariante numerico della matrice A.

2.4. Definizione. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, si dice *rango* di A e si indica con $\mathrm{rk}(A)$ il numero $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$, cioè la dimensione dello spazio delle sue righe (coincidente con la dimensione dello spazio delle sue colonne).

2.5. Corollario. *Sia* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. *Allora* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}({}^tA)$.

Dimostrazione. Evidente dal fatto che $\mathrm{rk}(A)$ è la dimensione dello spazio delle righe di A, il quale coincide con lo spazio delle colonne di ${}^tA$; tale spazio ha dimensione uguale a $\mathrm{rk}({}^tA)$. □

E' evidente che $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m, n)$. È quindi naturale dare la definizione seguente.

2.6. Definizione. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Diremo che A è di *rango massimo* se ha il massimo rango possibile ovvero se $\mathrm{rk}(A) = \min(m, n)$.

Cerchiamo ora metodi che rendano semplice il calcolo del rango. Le osservazione seguenti ci permetteranno di definire una classe di matrici delle quali è semplice calcolare il rango.

2.7. Osservazione. Aggiungendo righe e colonne nulle ad una matrice, il rango non cambia. Inoltre, date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} R_{\Pi(1)} \\ R_{\Pi(2)} \\ \vdots \\ R_{\Pi(m)} \end{pmatrix},$$

dove B è ottenuta da A mediante una permutazione Π sulle righe, si ha $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$. Analogamente, date le matrici

$$A' = (C_1, \dots, C_n) \qquad \text{e} \qquad B' = (C_{\Pi(1)}, \dots, C_{\Pi(n)})$$

dove B' è ottenuta da A mediante una permutazione Π sulle colonne, si ha $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(B')$. Infatti $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$ in quanto A e B hanno lo stesso spazio delle righe, e $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(B')$ poiché A' e B' hanno lo stesso spazio delle colonne.

2.8. Definizione. Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

2.8.1. Esempio. La seguente matrice è diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $R_1 = e_1$, $R_2 = 2e_2$, $R_3 = 0$, $R_4 = -3e_4$, quindi $R(A) = \mathcal{L}(R_1, R_2, R_3, R_4) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_4)$, da cui $\text{rk}(A) = 3$.

In generale, il rango di una matrice diagonale è uguale al numero delle righe (o delle colonne) non nulle, poiché i vettori riga non nulli sono multipli di vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e quindi linearmente indipendenti.

Una classe più ampia di matrici per le quali è ancora semplice calcolare il rango è la seguente:

2.9. Definizione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata; A si dice *triangolare superiore* se $a_{ij} = 0$ per $i > j$. Se inoltre $a_{ii} \neq 0$ per ogni i, allora A si dice *triangolare superiore completa.*

2.9.1. Esempio. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, triangolare superiore e triangolare superiore completa.

2.10. Teorema. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice triangolare superiore completa. Allora*

$$\text{rk}(A) = n.$$

Dimostrazione. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Basta provare che le n colonne $C_1, \ldots, C_n$ sono linearmente indipendenti.
Sia dunque $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0$, cioè, per esteso,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_{n-1} a_{1n-1} + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} a_{n-1\, n-1} + \lambda_n a_{n-1\, n} \\ \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da tale relazione, uguagliando le n-esime componenti di ambo i membri, si ha $\lambda_n a_{nn} = 0$ e quindi, poiché $a_{nn} \neq 0$, segue $\lambda_n = 0$. Analogamente le $(n-1)$-esime componenti danno

$$\lambda_{n-1} a_{n-1,n-1} + \lambda_n a_{n-1,n} = 0$$

e poiché $\lambda_n = 0$ e $a_{n-1,n-1} \neq 0$, segue $\lambda_{n-1} = 0$. Ripetendo il ragionamento, si prova che $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$. $\square$

Si può generalizzare il concetto di matrice triangolare nel caso di matrici non quadrate:

2.11. Definizione. Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice *triangolare superiore* (brevemente *TS*) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$. Si dice *triangolare superiore completa* (*TSC*) se, inoltre, $a_{ii} \neq 0$ per ogni i.

2.12. Osservazione. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e si ponga $p = \min(m, n)$; se A è triangolare superiore (completa) allora la sottomatrice B di A ottenuta intersecando le prime p righe e le prime p colonne è una matrice quadrata $p \times p$ triangolare superiore (completa).

2.12.1. Esempio. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

sono TSC. Inoltre le sottomatrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sono quadrate TSC come osservato in 2.12.

2.13. Corollario. *Se* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ *è TSC, allora* $\mathrm{rk}(A) = \min(m, n)$.

<u>Dimostrazione</u>. •) Caso $n \geq m$. Allora $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m, n) = m$ e A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m-1} & a_{2m} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m-1} & a_{3m} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mm} & * & \dots & * \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Sia B la sottomatrice di A costituita dalle prime m colonne di A. Poiché, per 2.12, B è TSC, allora da 2.10 segue che $C_1, \dots, C_m$ sono linearmente indipendenti. Quindi $\mathrm{rk}(A) \geq m$ e dunque la tesi.
•) Caso $n < m$. Allora $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m, n) = n$ e A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Eliminando le righe nulle si ha una matrice di tipo $(*)$, quindi $\mathrm{rk}(A) = n$. □

Le matrici A e A' dell'esempio 2.12.1 sono entrambe TSC e il loro rango è 3.

Nota. Tutte le nozioni e i risultati visti in questo paragrafo possono essere riformulati in termini di colonne anziché di righe e precisamente:

-) una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice *triangolare inferiore (TI)* se $a_{ij} = 0$ per $i < j$. Si dice *triangolare inferiore completa (TIC)* se, inoltre, $a_{ii} \neq 0$ per ogni i.

-) Vale il risultato analogo di 2.13, cioè se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è TIC, allora $\text{rk}(A) = \min(m, n)$.

2.14. Osservazione. Sia A una matrice qualunque; allora

$$A \text{ è TS (risp. TSC)} \iff {}^tA \text{ è TI (risp. TIC)}.$$

3. Matrici ridotte

Introduciamo una classe di matrici per le quali è particolarmente semplice calcolare il rango e che comprende la classe delle matrici triangolari superiori complete, vista nel paragrafo precedente.

3.1. Definizione. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice *ridotta per righe* se in ogni riga non nulla esiste almeno un elemento non nullo al di sotto del quale ci sono solo zeri. Tale elemento (non necessariamente unico se $m \leq n$) si dice *elemento speciale* (o anche *pivot*) della riga a cui appartiene.

Osserviamo che ogni matrice TSC è ridotta per righe.

3.1.1. Esempio. La seguente matrice è ovviamente ridotta per righe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'elemento speciale della I riga è 1, quello della III riga è 2, quello della IV riga è -1.
Si osservi che le 3 righe non nulle sono linearmente indipendenti, dunque $\text{rk}(A) = 3$.
Questo si può vedere anche eliminando le righe nulle di A (in tal modo non si cambia il rango) e poi permutando le colonne della matrice ottenuta, fino ad arrivare ad una matrice TSC, il cui rango è immediato da calcolare. Più precisamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elim. righe nulle}} A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\text{rk}(A) = \text{rk}(A') = \text{rk}(A'') = 3$.

Tale ragionamento è valido in generale e prova il seguente

3.2. Teorema. *Se A è una matrice ridotta per righe, allora il suo rango $\text{rk}(A)$ è uguale al numero di righe non nulle di A. In particolare, le sue righe non nulle sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia A' la sottomatrice di A ottenuta eliminando le righe nulle. Per 2.7, $\text{rk}(A) = \text{rk}(A')$. Ora si scambia la I colonna di A' con la colonna contenente l'elemento speciale della I riga, la II colonna di A' con la colonna contenente l'elemento speciale della II riga, e così via.
Sia A'' la matrice TSC ottenuta da A' con tale permutazione delle colonne. Per 2.7, si ottiene $\text{rk}(A') = \text{rk}(A'')$. Poiché A'' è TSC, per 2.13, il suo rango $\text{rk}(A'')$ è uguale al numero delle sue righe, quindi al numero delle righe non nulle di A. □

3.2.1. Esempio. Vediamo un ulteriore esempio della costruzione vista nella dimostrazione di 3.2. Consideriamo la matrice ridotta per righe i cui elementi speciali sono segnati in grassetto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -1 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Con opportune permutazioni di colonne, si ottengono le matrici

$$A \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A''.$$

Poiché A'' è TSC, il suo rango si calcola immediatamente. Pertanto $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A'') = 4$.

Nota. Come abbiamo osservato alla fine del paragrafo precedente, anche in questo, scambiando le parole “riga” e “colonna”, si hanno nozioni analoghe a quelle viste finora. In particolare:

-) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice *ridotta per colonne* se in ogni colonna non nulla esiste almeno un elemento non nullo alla destra del quale ci sono solo zeri. Tale elemento (non necessariamente unico) si dice *elemento speciale* (o anche *pivot*) della colonna a cui appartiene.

-) Se A è una matrice ridotta per colonne, allora $\mathrm{rk}(A)$ è uguale al numero di colonne non nulle di A. In particolare, le sue colonne non nulle sono linearmente indipendenti.

E' particolarmente utile il seguente risultato, la cui dimostrazione è immediata:

3.3. Proposizione. *Una matrice A è ridotta per righe se e solo se ${}^tA$ è ridotta per colonne.* □

Tale fatto ci permetterà, nel seguito, di trattare soltanto le matrici ridotte per righe e il corrispondente procedimento di riduzione per righe, essendo chiari gli analoghi per le colonne.

4. Riduzione di matrici

Avendo ora a disposizione una “buona” classe di matrici (quelle ridotte) delle quali sappiamo calcolare il rango, cerchiamo un procedimento che ci permetta di associare ad una matrice qualsiasi una matrice ridotta che abbia lo stesso rango.

Vediamo inatnto alcune procedure che mostreremo preservare lo spazio delle righe di una matrice e che vengono dette *trasformazioni elementari sulle righe* (o anche *mosse di Gauss*):

(D) sostituzione di una riga R_i con $R_i + aR_j$, ove $a \in \mathbb{R}$ e $j \neq i$;

(s) scambio di R_i con R_j;

(λ) sostituzione di una riga R_i con λR_i, ove $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Nella trasformazione (s) la lettera s sta per scambio; nella trasformazione (λ) la lettera λ sta per prodotto per uno scalare λ; infine D sta per “determinante” e il motivo di tale scelta sarà chiaro in seguito.

4.1. Definizione. Date due matrici $A, A' \in \mathbb{R}^{m,n}$, A' si dice *trasformata per righe* di A se A' è ottenuta da A mediante un numero finito di successive trasformazioni elementari sulle righe di tipo (D), (s), (λ).

4.2. Proposizione. *Siano $A, A' \in \mathbb{R}^{m,n}$, con A' trasformata per righe di A. Allora lo spazio $R(A)$ delle righe di A e lo spazio $R(A')$ delle righe di A' coincidono; in particolare* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$.

Dimostrazione. Sia A' ottenuta da A con una trasformazione (D), ad esempio $R_i \longrightarrow R_i + aR_j$. È evidente che $R(A') \subseteq R(A)$, poiché

$$R(A') = \mathcal{L}(R_1, \dots, R_{i-1}, R_i + aR_j, R_{i+1}, \dots, R_m)$$

e

$$R(A) = \mathcal{L}(R_1, \dots, R_{i-1}, R_i, R_{i+1}, \dots, R_m).$$

Proveremo ora che $R(A) \subseteq R(A')$. Poiché le righe di A' sono uguali a quelle di A eccetto la i-esima, basterà provare che la i-esima riga R_i di A è combinazione lineare delle righe di A'. Infatti si ha $R_i = (R_i + aR_j) - aR_j$, da cui la tesi.
I casi (s) e (λ) sono evidenti. Ne segue che operando successivamente un numero finito di trasformazioni (D), (s), (λ), lo spazio delle righe non varia. $\square$

4.2.1. Esempio. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operiamo sulle righe di A con trasformazioni di tipo (D):

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3' \to R_3' - R_2'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B.$$

La matrice B è ridotta per righe, quindi $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = 3$.

L'esempio precedente indica come affrontare il caso generale con una procedura che va anche sotto il nome di *algoritmo di Gauss*.

4.3. Proposizione. *Sia A una matrice; esiste una opportuna successione di trasformazioni elementari (di tipo (D)) sulle righe, tale che la matrice B ottenuta in tal modo è ridotta per righe.*

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Vogliamo individuare una possibile serie di trasformazioni elementari che ci permettano di passare da A ad una matrice B ridotta per righe.
Sia R_i la prima riga non nulla di A e sia a_{ij} il primo elemento non nullo di R_i. Per ottenere una matrice A' che abbia tutti zeri sotto l'elemento a_{ij} si opera con trasformazioni di tipo (D):

$$R_k \longrightarrow R_k - a_{kj}{a_{ij}}^{-1} R_i, \quad \text{per ogni } k > i.$$

Si consideri ora la matrice $A' = (a'_{ij})$ così ottenuta. Si osservi che le prime i righe di A' sono uguali alle corrisponenti righe di A; inoltre l'elemento $a'_{ij} = a_{ij}$ ha tutti zeri al di sotto. Sia ora R'_h la prima riga non nulla di A', con $h > i$. Sia a'_{hp} il primo elemento non nullo di R'_h. Procedendo come prima, si operano le trasformazioni di tipo (D):

$$R'_k \longrightarrow R'_k - a'_{kp}{a'_{hp}}^{-1} R'_h, \quad \text{per ogni } k > h.$$

Si ottiene dunque una matrice A''. Iterando il procedimento (un numero finito di volte) si perviene ad una matrice B, che è ridotta per righe per costruzione. $\square$

4.4. Definizione. Si dice *riduzione per righe* di una matrice A, una successione di trasformazioni elementari sulle righe tale che la matrice A' ottenuta alla fine del procedimento è ridotta per righe.

4.5. Osservazione. In 4.3 si sono utilizzate solo trasformazioni elementari di tipo (D). Tuttavia in alcuni casi, per semplificare i calcoli, può essere utile impiegare anche trasformazioni di tipo (s) e (λ). In ogni caso, il rango resta invariato per 4.2. In sintesi: *la riduzione per righe di una matrice non ne altera il rango.*

4.5.1. Esempio. Riduciamo per righe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice si può ridurre operando come in 4.3 con sole trasformazioni di tipo (D). In questo caso è però conveniente scambiare la prima con la quarta riga. Infatti si ha:

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Come si può osservare, B è già ridotta per righe; segue che $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = 4$.

4.5.2. Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Per ridurre A si può operare iniziando con la trasformazione di tipo (D): $R_2 \to R_2 - 3/2R_1$ ottenendo

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

E' evidente che, continuando la riduzione come al solito, i calcoli si complicano sempre più, poiché i coefficienti della matrice non sono interi. A tale fatto si può ovviare, ad esempio, come segue:

$$A \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R'_3 \to R'_2 + R'_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

una TSC da cui $\mathrm{rk}(A) = 3$.

4.6. Osservazione. La più semplice applicazione della riduzione di matrici è la determinazione della dimensione e di una base di un sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ di $\mathbb{R}^n$. A tale scopo associamo in modo naturale al sistema di generatori $v_1, \dots, v_r$ di V una matrice, le cui righe (o colonne) sono i vettori suddetti:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad B = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo, ad esempio, la prima di queste due rappresentazioni, dunque $R(A) = V$.
Riduciamo A per righe, ottenendo una matrice

$$A' = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha: $\dim(V) = \dim(R(A)) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$, cioè $\dim(V)$ è uguale al numero di righe non nulle di A'. Inoltre le righe non nulle di A' costituiscono una base di V, in quanto $V = R(A) = R(A')$.

4.6.1. Esempio. Sia $I = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^4$, dove $v_1 = (1, -1, 2, 1)$, $v_2 = (-2, 2, -4, -2)$, $v_3 = (1, 1, 1, -1)$, $v_4 = (-1, 3, -3, -3)$, $v_5 = (1, 2, 1, 2)$. Allora,

a) determinare una base $\mathcal{B}$ di $V = \mathcal{L}(I) \subset \mathbb{R}^4$, con $\mathcal{B} \subset I$;

b) completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Sia A la matrice le cui righe sono costituite dai vettori di I, cioè

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riducendo A per righe si ha:

$$A \xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 + R_1 \\ R_5 \to R_5 - R_1}]{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R'_5 \to 2R'_5 - 3R'_3]{R'_4 \to R'_4 - R'_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = A'$$

da cui segue $\mathrm{rk}(A) = 3$ e quindi $\dim(V) = 3$. Inoltre una base per V è ad esempio data dalle 3 righe non nulle di A', poiché $R(A) = R(A')$. Invece la base $\mathcal{B}$ richiesta è data dai vettori di A corrispondenti alle 3 righe non nulle di A', cioè $\mathcal{B} = (v_1, v_3, v_5)$. Si consideri infatti

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = B'$$

dove B' è ottenuta con le stesse trasformazioni operate nella riduzione precedente.
b) Completiamo $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ utilizzando vettori (in questo caso ne basta uno) della base canonica. È sufficiente aggiungere alla matrice B'' una riga costituita dalle componenti di un vettore della base canonica in modo che la matrice ottenuta sia ancora ridotta; ad esempio con e_4:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \\ e_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathcal{C} = (v_1, v_3, v_5, e_4)$.

4.6.2. Esempio. Sia $I = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ dato da $v_1 = (0,1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (0,2,3,2)$, $v_4 = (1,2,2,1)$. Posto $V = \mathcal{L}(I) \subset \mathbb{R}^4$:

a) determinare una base $\mathcal{B}$ di V, con $\mathcal{B} \subset I$;

b) completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Sia A la matrice le cui righe sono costituite dai vettori di I, cioè

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conviene operare lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_4$ e poi ridurre come di consueto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenendo conto dello scambio operato, si ha: $\mathcal{B} = (v_4, v_2, v_3)$.
b) Come in 4.6.1, si ha

$$\begin{pmatrix} v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui risulta $\mathcal{C} = (v_4, v_2, v_3, e_4)$.

4.6.3. Esempio. Con i dati di 4.6.2, vogliamo determinare una base $\mathcal{B} \subset I$ con il metodo degli scarti successivi. Anche tale esercizio può essere risolto con un uso opportuno della riduzione di matrici; come al solito sia

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che in 4.6.2 si è operato lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_4$ per semplificare i calcoli; tale operazione non è in questo caso consentita, poichè condurrebbe ad una base che non contiene v_1 che, invece fa parte della base ottenuta con il metodo degli scarti successivi. Riduciamo quindi A per righe:

$$A \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R'_3 \to R'_3 - R'_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base ottenuta è dunque (v_1, v_2, v_4). Infatti si verifica facilmente che v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2. Per vederlo si osservi che $R'_3 - R'_2 = 0$, che $R'_3 = R_3 - 2R_1$ e che $R'_2 = R_2 - R_1$; da cui risulta $R_3 - R_2 - R_1 = 0$ e quindi $v_3 = v_1 + v_2$.

Il metodo introdotto per ottenere una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (e un suo eventuale completamento ad una base di $\mathbb{R}^n$) si può estendere ad uno spazio vettoriale qualunque, passando attraverso le componenti dei vettori in esame, rispetto ad una base fissata.

4.6.4. Esempio. Sia $V = \mathcal{L}(I) \subset \mathbb{R}^{2,3}$ con $I = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ dove

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V, con $\mathcal{B} \subset I$;

b) completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^{2,3}$.

a) Per poter impiegare la riduzione di matrici anche in questo caso, è necessario "rappresentare" le matrici M_1, M_2, M_3, M_4 come vettori riga: tali righe saranno date dalle componenti delle matrici M_i rispetto ad una base fissata. Sia $\mathcal{E} = (E_{ij} \mid i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ la base di $\mathbb{R}^{2,3}$ introdotta in 1.3. Si ha

$$M_1 = E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{22} = (1, 1, 1, 0, 1, 0)_{\mathcal{E}}.$$

Operando analogamente con le altre matrici M_i si ha la matrice delle componenti:

$$A = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo per righe si ha

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero una matrice ridotta per righe. Quindi $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_4)$.
b) Completiamo $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^{2,3}$ con 3 elementi di $\mathcal{E}$ (ciò è possibile per il teorema di completamento a una base):

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_4 \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{stessa riduzione fatta sopra}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta è ridotta per righe e questo garantisce che $\{M_1, M_2, M_4, E_{13}, E_{21}, E_{22}\}$ sono linearmente indipendenti. Essendo 6 vettori indipendenti nello spazio $\mathbb{R}^{2,3}$ che ha dimensione 6, essi ne costituiscono una base $\mathcal{C}$ che completa $\mathcal{B}$.

5. Determinante di una matrice

Il concetto di determinante è fondamentale nell'algebra lineare: mentre il rango associa ad una matrice un intero che tiene conto della mutua dipendenza delle righe e delle colonne, il determinante è un numero reale – legato ad una matrice *quadrata* – il cui significato è meno immediato.

Definiremo il determinante in modo algoritmico e ricorsivo, rimandando ad altri testi la definizione astratta che utilizza il linguaggio dell'algebra multilineare.

Si dice *determinante* di una matrice 2×2 l'applicazione

$$\det : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

definita in tal modo: se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

allora

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Possiamo anche vedere il determinante come funzione dei vettori colonna di $A = (C_1\ C_2)$, cioè

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (C_1, C_2) & \mapsto & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{array}.$$

5.1. Osservazione - Definizione. Si verifica direttamente che "det" è *bilineare* sulle colonne cioè soddisfa le proprietà

$$(Bil) \qquad \begin{cases} \det(\lambda C_1 + \lambda' C_1', C_2) = \lambda \det(C_1, C_2) + \lambda' \det(C_1', C_2) \\ \det(C_1, \lambda C_2 + \lambda' C_2') = \lambda \det(C_1, C_2) + \lambda' \det(C_1, C_2') \end{cases}$$

per ogni C_1, C_1', C_2, $C_2' \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ (la verifica è lasciata al lettore).

Diremo inoltre che "det" è *alternante* (o anti-simmetrica) in quanto si verifica che

$$(Alt) \qquad \det(C_2, C_1) = -\det(C_1, C_2).$$

Da (Alt) segue immediatamente che il determinante si annulla se le due colonne sono uguali.
Ma, più in generale, il determinante si annulla se le due colonne sono una multipla dell'altra. Infatti, se $C_2 = \lambda C_1$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\det(C_1, C_2) = \det(C_1, \lambda C_1) = \lambda \det(C_1, C_1) = 0$$

dove la seconda uguaglianza discende da (Bil).

5.1.1. Esempio. Sia (e_1, e_2) la base canonica di $\mathbb{R}^2$, allora

$$\det(e_1, e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \det(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(e_2, e_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \det(e_2, e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5.2. Osservazione. Come conseguenza della bilinearità e dell'alternanza, il determinante non cambia se si somma ad una colonna un multiplo dell'altra:

$$\det(C_1 + \lambda C_2, C_2) = \det(C_1, C_2) + \det(\lambda C_2, C_2) = \det(C_1, C_2).$$

Come di consueto, generalizziamo quanto ora descritto alle matrici 3×3 e poi a quelle $n \times n$.

5.3. Definizione. Se A è una matrice 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

diremo *determinante* di A e denoteremo con $\det(A)$ il numero reale

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ & = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Come prima "det" può essere anche visto non solo come un'applicazione $\mathbb{R}^{3,3} \longrightarrow \mathbb{R}$, ma anche come funzione dei vettori colonna di $A = (C_1, C_2, C_3)$

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (C_1, C_2, C_3) & \mapsto \det(A) \end{aligned}.$$

5.4. Osservazione. Si vede facilmente che valgono le analoghe delle proprietà (Bil) per le matrici 2×2, ma in questo caso si avranno 3 proprietà che esprimono la linearità su ognuno dei 3 argomenti della funzione.
Vale anche la proprietà alternante, ovvero se si scambiano tra loro due vettori colonna il determinante cambia segno. Ad esempio,

$$\det(C_2, C_1, C_3) = -\det(C_1, C_2, C_3).$$

e relazioni analoghe per scambio di due colonne qualsiasi.
Di conseguenza il determinante si annulla se una delle colonne è multiplo di un altra e, come visto per le matrici 2×2, il determinante non cambia se si somma ad una colonna un multiplo delle altre. Ad esempio:

$$\det(C_1 + \lambda C_2 + \mu C_3, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3).$$

5.4.1. Esempio. Se (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$, allora $\det(e_i, e_i, e_i) = 0$, $\det(e_i, e_i, e_j) = 0$, $\det(e_1, e_2, e_3) = \det(I_3) = 1$, e così via.

Come visto nella Definizione 5.3 di determinante di una matrice 3×3, per tale nozione si utilizzano i determinanti di sottomatrici 2×2 della matrice A, e precisamente $\det(A)$ è la somma, a segni alterni, dei prodotti tra gli elementi della prima riga con determinanti di opportune sottomatrici. Per generalizzare tale nozione ad una matrice $n \times n$, dobbiamo introdurre dei concetti preliminari.

5.5. Definizione. Data la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

per ogni coppia (i, j) si dice *minore complementare* di a_{ij}, e si indica con A_{ij}, la sottomatrice di A costituita dall'intersezione di tutte le righe eccetto la i-ma e di tutte le colonne eccetto la j-ma.

5.6. Definizione. Data la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, si dice *complemento algebrico* di a_{ij} l'elemento di $\mathbb{R}$ definito da $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

5.6.1. Esempio. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3,3}$ la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo, ad esempio, A_{11}, A_{12}, α_{11}, α_{12}. Dalle definizioni 5.5 e 5.6 si ha:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = 5, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -2.$$

5.7. Definizione. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. si dice *determinante* di A il numero reale

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \dots + a_{1n}\alpha_{1n} \qquad (\mathcal{R}_1)$$

e tale espressione si dice *sviluppo del determinante secondo la prima riga.*

Si osservi che la definizione 5.3 di determinante di una matrice 3×3 è proprio lo sviluppo del determinante secondo la prima riga.

Si può provare che il valore di $\det(A)$ non dipende dalla riga (né dalla colonna) rispetto alla quale si sviluppa con il seguente noto teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

5.8. Teorema. *(Laplace) Per ogni $i = 2, \dots, n$ si ha:*

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in} \qquad (\mathcal{R}_i)$$

e tale espressione si dice sviluppo del determinante secondo la riga i-ma.
Analogamente, per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\det(A) = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \dots + a_{nj}\alpha_{nj}, \qquad (\mathcal{C}_j)$$

e tale espressione si dice sviluppo del determinante secondo la colonna j-ma. □

5.8.1. Esempio. Sia $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice identica. E' immediato verificare che

$$\det(I_n) = 1.$$

5.8.2. Esempio. Calcoliamo il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando, ad esempio, secondo la prima riga si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

5.8.3. Esempio. Dalla definizione di determinante e dal Teorema di Laplace segue immediatamente che, se una matrice ha una riga o una colonna nulla, il suo determinante è nullo.

Dal teorema 5.8 segue immediatamente il seguente:

Corollario 5.9. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$**.** *Allora* $\det({}^tA) = \det(A)$. □

Possiamo ancora pensare al determinante di una matrice come ad una funzione delle sue colonne, ovvero se $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$, allora $\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$; cioè

$$\begin{array}{rcl} \det : \ \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto & \det(A) \end{array}.$$

Usando la definizione 5.7 si può provare che tale applicazione, come nei casi 2×2 e 3×3, è multilineare e alternante, cioè valgono le seguenti proprietà, delle quali omettiamo la dimostrazione:

5.10. Proposizione. *Sia* $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$*; si hanno i seguenti fatti:*

i) *se* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ *e* $C_1' \in \mathbb{R}^n$, *allora*

$$\det(\lambda C_1 + \lambda' C_1', C_2, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \lambda' \det(C_1', C_2, \dots, C_n)$$

e analoga proprietà per qualunque altra colonna di A*;*

ii) *se* $A' = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$, *posta* $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ *la permutazione delle colonne che trasforma* A *in* A', *allora*

$$\det(A') = (-1)^\sigma \det(A).$$

dove $(-1)^\sigma$ *è la parità della permutazione* σ, *ovvero* $(-1)^\sigma = 1$ *se* σ *si decompone in un numero pari di scambi e* $(-1)^\sigma = -1$ *se* σ *si decompone in un numero dispari di scambi.* □

5.11. Corollario. *Con le precedenti notazioni:*

i) $\det(\alpha C_1, C_2, \ldots, C_n) = \alpha \det(A)$ *e, in generale, il determinante di una matrice che si ottiene da A moltiplicando una colonna per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{R}$ *è* $\alpha \cdot \det(A)$*;*

ii) *se* $C_i = C_j$ *per qualche* $i, j = 1, \ldots, n$*, allora* $\det(A) = 0$*;*

iii) $\det(\alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n, C_2, \ldots, C_n) = 0$*; in generale il determinante di una matrice in cui una colonna è combinazione lineare delle restanti è uguale a zero;*

iv) $\det(C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n, C_2, \ldots, C_n) = \det(A)$*; in generale il determinante di una matrice ottenuta da A sommando a una colonna una combinazione lineare delle altre è uguale a* $\det(A)$*.*

Dimostrazione. *i)* Da 5.10 *i)*, nel caso particolare in cui $\lambda = \alpha$ e $\lambda' = 0$.
ii) Se $C_i = C_j$, la matrice che si ottiene da A scambiando C_i con C_j è ancora A; dunque, applicando 5.10 *ii)*: $\det(A) = -\det(A)$, quindi $\det(A) = 0$.
iii) Da 5.10 *i)* si ottiene

$$\det(\alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n, C_2, \ldots, C_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \det(C_i, C_2, \ldots, C_n).$$

D'altra parte $\det(C_i, C_2, \ldots, C_n) = 0$ per ogni $i = 2, \ldots, n$, per *iii)* e dunque si ha la tesi.
iv) Da 5.10 *i)* si ottiene $\det(C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n, C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \det(\alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n, C_2, \ldots, C_n)$ e si conclude applicando la *iv)*. $\square$

5.12. Osservazione. Si può pensare al determinante di una matrice quadrata in termini delle sue righe piuttosto che delle sue colonne. Per 5.8 e 5.10, avremo esattamente le stesse proprietà di multilinearità e alternanza sulle righe e quindi l'analogo del Corollario 5.11.

Concludiamo questa parte con un utile teorema utile, del quale omettiamo la dimostrazione:

5.13. Teorema. *(Binet) Siano* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *due matrici quadrate dello stesso ordine. Allora*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

$\square$

6. Calcolo del determinante mediante riduzione

La definizione di determinante (5.7) e il teorema di Laplace (5.8) ci permettono di calcolare il determinante di una qualunque matrice quadrata. Vediamo ora un ulteriore metodo di calcolo del determinante che utilizzerà la riduzione di matrici. Esaminiamo dapprima alcuni casi semplici, cioè le matrici diagonali e le matrici triangolari superiori complete.

6.1. Proposizione. *Sia* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ *una matrice quadrata. Se A è TS (risp. TI) allora*

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

In particolare, se A è diagonale allora $\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Dimostrazione. Se A è TS (risp. TI), la prima affermazione si prova sviluppando $\det(A)$ con il teorema di Laplace secondo la prima colonna (risp. la prima riga) e iterando tale procedura sulle matrici di ordine inferiore. La seconda affermazione segue dal fatto che una matrice diagonale è contemporaneamente TS e TI. $\square$

6.2. Osservazione. All'inizio del paragrafo 4, abbiamo definito le trasformazioni elementari di tipo $(s), (\lambda), (D)$ sulle righe di una matrice. Vediamo come varia il determinante a seconda del tipo di trasformazione che si opera sulle righe di una matrice. Sia A una matrice quadrata e sia A' una matrice ottenuta da A mediante una trasformazione elementare.

(s) $\det(A') = -\det(A)$ (per 5.10, *ii*).

(λ) $\det(A') = \lambda \det(A)$ (per 5.11, *i*).

(D) $\det(A') = \det(A)$ (per 5.11, *iv*).

Ovviamente valgono le stesse proprietà se si operano trasformazioni elementari sulle colonne.

6.2.1. Esempio. Calcoliamo il determinante della matrice A con trasformazioni sulle righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Avendo operato solo trasformazioni di tipo (D), per 6.2 si ha $\det(A) = \det(B)$; inoltre per 6.1 $\det(B) = 1 \cdot (-1) \cdot 5 = -5$

6.2.2. Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Poiché si è operato uno scambio di colonne, si ha $\det(A) = -\det(B) = -3$.

6.3. Osservazione. In 6.2.1 passando da A a B con trasformazioni elementari solo sulle righe, resta inalterato lo spazio delle righe, cioè $R(A) = R(B)$. Tuttavia cambia quello delle colonne.
In 6.2.2, né lo spazio delle righe né lo spazio delle colonne vengono conservati.

6.4. Proposizione. *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ridotta per righe e senza righe nulle. Allora*

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

dove $a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \dots, a_{n,\sigma(n)}$ sono gli elementi speciali della prima, ..., n–esima riga, rispettivamente, e σ è la permutazione delle colonne che trasforma A nella corrispondente matrice TSC.

Dimostrazione. Sia $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice TSC ottenuta da A mediante la permutazione σ delle colonne. Per 5.10, si ha subito che $\det(A) = (-1)^{\sigma} \det(B)$, dove $(-1)^{\sigma}$ è la parità di σ.
D'altra parte, per 6.1, si ha $\det(B) = b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$.
Ma, per costruzione, si ha $b_{11} = a_{1,\sigma(1)}, \quad \dots \quad, b_{nn} = a_{n,\sigma(n)}$ e quindi si ottiene la tesi. □

Poiché ogni matrice quadrata si può ridurre (con riduzione per righe) ad una matrice ridotta per righe, siamo in grado di dare un metodo, alternativo allo sviluppo di Laplace, per calcolare il determinante di una matrice quadrata.

6.5. Metodo di calcolo del determinante.

- •) si riduce A per righe, solo con trasformazioni di tipo (D), ad una matrice A' ridotta per righe; per 6.2, $\det(A') = \det(A)$;
- •) si calcola il determinante di A':

  - se A' ha almeno una riga nulla, allora $\det(A') = 0$ per 5.11 *ii*);

  - se A' non ha righe nulle, allora $\det(A')$ è il prodotto con segno degli elementi speciali delle sue n righe (per 6.4); dunque, posto $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, si ha
$$\det(A') = (-1)^{\sigma} a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}.$$
  (Vale un metodo analogo scambiando le parole "riga" e "colonna").

6.5.1. Esempio. Calcoliamo il seguente determinante con il metodo di riduzione:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

7. Determinante e matrici invertibili

7.1. Proposizione. *Se* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *allora*
$$\det(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A) < n.$$

<u>Dimostrazione</u>. " $\Leftarrow$" Per ipotesi le n colonne $C_1, \dots, C_n$ di A sono linearmente dipendenti, dunque esiste i tale che C_i è combinazione lineare delle rimanenti colonne. Per 5.11 *iv*) si ha $\det(A) = 0$.
" $\Rightarrow$" Supponiamo che sia $\mathrm{rk}(A) = n$; allora si riduce A ad una matrice A' ridotta per righe e priva di righe nulle, poiché $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = n$. Pertanto, per 6.4, $\det(A')$ risulta essere il prodotto con segno degli elementi speciali di A'. Ma gli elementi speciali sono non nulli per definizione, dunque $\det(A') \neq 0$. Per 6.2 si ha inoltre $\det(A) = \det(A')$. Ne segue $\det(A) \neq 0$, contro l'ipotesi. □

7.2. Osservazione. L'equivalenza 7.1 si può ovviamente riformulare nel seguente modo:
$$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A) = n.$$

7.3. Proposizione. *Sia* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, *allora*
$$A \text{ è invertibile} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

<u>Dimostrazione</u>. " $\Rightarrow$" Se A è invertibile, esiste la sua inversa A^{-1}. Usando il teorema di Binet sul prodotto $AA^{-1} = I_n$ si ottiene $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$ da cui si ottiene non solo che $\det(A) \neq 0$ ma anche $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.
" $\Leftarrow$" Se $\det(A) \neq 0$ diamo direttamente la matrice inversa. Poniamo $B = (b_{ij})$ con:
$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \alpha_{ji}$$
dove α_{ji} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} della matrice A come definito in 5.6.
Calcolando la matrice AB, con la definizione di prodotto righe per colonne, si ha:
$$(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{ks} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} a_{rk} \alpha_{sk} = \begin{cases} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1, & \text{se } r = s \,; \\ 0, & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per un risultato (il II Teorema di Laplace), che non è riportato in queste note. In conclusione, $AB = I_n$, dunque $B = A^{-1}$ e quindi A è invertibile. $\square$

Si notino gli indici scambiati di b_{ij} e α_{ji} nella formula precedente.

7.3.1. Esempio. Calcoliamo l'inversa della generica matrice 2×2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Come osservato ciò è possibile solo se $\Delta := |A| = ad - bc \neq 0$. In tal caso $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, dove $\alpha_{11} = d, \alpha_{21} = -b, \alpha_{12} = -c, \alpha_{22} = a$. Pertanto

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7.3.2. Esempio. Calcoliamo l'inversa della matrice dell'esempio 5.8.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto che $\det(A) = 2$. Da un calcolo diretto

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = (+)\,1 & \alpha_{12} = (-)\,2 & \alpha_{13} = (+)\,(-1) \\ \alpha_{21} = (-)\,1 & \alpha_{22} = (+)\,2 & \alpha_{23} = (-)\,1 \\ \alpha_{31} = (+)\,1 & \alpha_{32} = (-)\,0 & \alpha_{33} = (+)\,1 \end{array}$$

da cui si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Traccia di una matrice

8.1. Definizione. Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice quadrata di ordine n, diremo *traccia* di A e denoteremo con $\operatorname{tr}(A)$ il numero reale

$$\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

La traccia della matrice A è quindi la somma degli elementi lungo la diagonale di A.
La funzione traccia soddisfa una semplice proprietà:

8.2. Proposizione. *Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ due matrici quadrate di ordine n, allora*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

ovvero nella traccia si può scambiare l'ordine delle matrici.

Dimostrazione.
L'elemento di indici ij della matrice prodotto AB è dato da $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, e quello della matrice prodotto BA è dato da $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$; in generale $(AB)_{ij} \neq (BA)_{ij}$. D'altra parte

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{j=1}^{n} (AB)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

$\square$