Capitolo IV
SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

È ben noto che in $\mathcal{V}_O^3$ si possono considerare strutture più ricche di quella di spazio vettoriale; si pensi in particolare all'operazioni di prodotto scalare di vettori. Con tale ulteriore strutture si possono introdurre i concetti di ortogonalità di vettori e distanza tra punti; così facendo si fornisce a $\mathcal{V}_O^3$ la struttura classica usata nella geometria euclidea.

In questo capitolo estenderemo ad un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale qualunque la struttura di $\mathcal{V}_O^3$ pensato come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Vedremo inoltre come in tali spazi si possano definire delle basi "speciali" (quelle ortonormali).

1. Prodotto scalare, norma, ortogonalità

1.1. Esempio. Il prodotto scalare usuale in $\mathcal{V}_O^3$, tenuto conto dell'isomorfismo $\mathcal{V}_O^3 \cong \mathbb{R}^3$ (e della Proposizione 3.6. Cap II), induce naturalmente un'applicazione

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

definita da:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Si verificano le seguenti proprietà: per ogni $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

i)
$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = (y_1, y_2, y_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}(a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3)) \cdot (z_1, z_2, z_3) &= (ax_1 + by_1)z_1 + (ax_2 + by_2)z_2 + (ax_3 + by_3)z_3 \\ &= a(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + b(y_1z_1 + y_2z_2 + by_3z_3) \\ &= a(x_1, x_2, x_3) \cdot (z_1, z_2, z_3) + b(y_1, y_2, y_3) \cdot (z_1, z_2, z_3)\end{aligned}$$

iii)
$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

iv)
$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \iff (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0).$$

Le precedenti proprietà portano alla seguente definizione generale.

1.2. Definizione. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita. Diciamo *prodotto scalare* in V a valori reali un'applicazione

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

denotata da $(v, w) \mapsto v \cdot w$ tale che, per ogni $v, w, v_1, v_2 \in V$ e per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ si ha:

i) $v \cdot w = w \cdot v$;

ii) $(a_1v_1 + a_2v_2) \cdot w = a_1(v_1 \cdot w) + a_2(v_2 \cdot w)$;

iii) $v \cdot v \geq 0$;

iv) $v \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0_V$.

In tal caso utilizzeremo la notazione $(V, \cdot)$, intendendo che V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dotato di prodotto scalare (a volte si dice anche che la coppia $(V, \cdot)$ è uno *spazio euclideo*).

Usando la linearità sul primo argomento e la simmetria (come negli assiomi *i*) e *ii*)) si deduce la linearità anche sul secondo argomento. In maniera sintetica si dice anche che un prodotto scalare è una *forma bilineare simmetrica.*

1.2.1. Esempio. E' ovvio che il prodotto scalare definito in $\mathcal{V}^3_O$ è un prodotto scalare nel senso di 1.2. Analogamente l'applicazione dell'Esempio 1.1 è un prodotto scalare per lo spazio $\mathbb{R}^3$. Tale prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ non è l'unico come si vede dall'esempio seguente.
Sia $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$p((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Poiché p è bilineare simmetrica (come si verifica facilmente), soddisfa le proprietà *i*) e *ii*) della Definizione 1.2. Resta da provare che $p(v, v) \geq 0$ ed che vale l'uguaglianza se e solo se $v = 0$. Ciò è chiaro in quanto $p(v, v) = 2v_1^2 + 3v_2^2 + v_3^2$, dove $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Estendiamo ad $\mathbb{R}^n$ in maniera diretta il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato in 1.1.

1.3. Definizione. Si dice *prodotto scalare canonico* su $\mathbb{R}^n$ l'applicazione

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

La coppia $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ si dice *spazio euclideo* e si denota E^n.

Per l'applicazione precedente, gli assiomi di prodotto scalare sono di facile verifica:

i) $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = (y_1, \ldots, y_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)$;

ii) è lasciata al lettore;

iii) $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$;

iv) $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$.

1.4. Definizione. Sia $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare. L'applicazione

$$\| - \| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v \longmapsto \| v \| = \sqrt{v \cdot v}$$

si dice *norma*; il numero reale $\| v \|$ si dice *norma* di v, per ogni $v \in V$.

1.4.1. Esempio. In $E^n = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ la norma di un vettore assume la forma:

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

In particolare in E^3 si ha $\| (x_1, x_2, x_3) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Si hanno immediatamente le proprietà:

1.5. Proposizione. *Sia* $(V, \cdot)$ *un* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale con prodotto scalare; allora:*

i) $\| v \| \geq 0$*;*

ii) $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$*;*

iii) $\| av \| = |a| \, \| v \|$. $\square$

Due importanti risultati sulla norma sono i seguenti:

1.6. Proposizione. *(Disuguaglianza di Schwarz). Sia* $(V, \cdot)$ *un* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale con prodotto scalare e siano* $v, w \in V$*. Allora*

$$|v \cdot w| \ \leq \| v \| \, \| w \| \ .$$

<u>Dimostrazione</u>. Se $v = 0_V$ oppure $w = 0_V$ la tesi è vera. Siano dunque entrambi i vettori $\neq 0_V$. Con $a = \| w \|$ e $b = \| v \|$, per 1.2. *iii)* si ha

$$0 \leq \| av \pm bw \|^2 = (av \pm bw) \cdot (av \pm bw) = a^2 \| v \|^2 \pm 2ab(v \cdot w) + b^2 \| w \|^2 = 2ab(\| v \| \| w \| \pm v \cdot w).$$

Poiché sia a sia b sono scalari positivi, possiamo semplificarli ottenendo,

$$\mp \, v \cdot w \leq \| v \| \, \| w \|$$

da cui la tesi. $\square$

1.6.bis Definizione. *Angolo tra vettori.* La disuguaglianza precedente può essere scritta come:

$$\frac{|v \cdot w|}{\| v \| \, \| w \|} \ \leq \ 1, \qquad \text{ovvero} \qquad -1 \ \leq \ \frac{v \cdot w}{\| v \| \, \| w \|} \ \leq \ 1.$$

Esiste quindi un angolo α, con $0 \leq \alpha \leq \pi$, tale che

$$\frac{v \cdot w}{\| v \| \, \| w \|} = \cos \alpha$$

in analogia al caso dei vettori geometrici in Cap. II, 3.1.

1.7. Proposizione. *(Disuguaglianza triangolare o di Minkowski). Sia* $(V, \cdot)$ *un* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale con prodotto scalare e siano* $v, w \in V$*. Allora*

$$\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| \ .$$

<u>Dimostrazione</u>. Si osservi dapprima che $v \cdot w \leq |v \cdot w| \ \leq \| v \| \, \| w \|$, dove la prima disuguaglianza segue dalla definizione di valore assoluto e la seconda è quella di Schwarz. Pertanto

$$\begin{aligned} \| v + w \|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) = \| v \|^2 + 2(v \cdot w) + \| w \|^2 \\ &\leq \| v \|^2 + 2 \| v \| \, \| w \| + \| w \|^2 = (\| v \| + \| w \|)^2 \end{aligned}$$

da cui la tesi. $\square$

1.8. Definizione. Sia $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare e siano $v, w \in V$; v e w si dicono *ortogonali* se $v \cdot w = 0$.

Vediamo ora una serie di proprietà riguardanti l'ortogonalità:

1.9. Proposizione. *Siano $(V,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare e $v, w_1, \cdots, w_s \in V$; se v è ortogonale a w_i per ogni i, allora v è ortogonale ad ogni combinazione lineare di $w_1, \cdots, w_s$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $v \cdot w_i = 0$ per ogni i; dunque per la bilinearità del prodotto scalare, per ogni scelta di scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, si ha

$$v \cdot (\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_s w_s) = \lambda_1 (v \cdot w_1) + \ldots + \lambda_s (v \cdot w_s) = 0.$$

$\square$

1.10. Proposizione. *Siano $(V,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare e $v_1, \cdots, v_s$ vettori non nulli di V tali che $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$. Allora $v_1, \cdots, v_s$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Si consideri una combinazione lineare nulla dei vettori dati:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0_V.$$

Sia $v_i \in \{v_1, \cdots, v_s\}$; allora $0 = v_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s) = \lambda_1 (v_i \cdot v_1) + \ldots + \lambda_s (v_i \cdot v_s) = \lambda_i \parallel v_i \parallel^2$; poiché $v_i \neq 0_V$, allora $\lambda_i = 0$. Ripetendo il procedimento per ogni vettore v_i, si ottiene che deve essere $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. $\square$

1.11. Definizione. Sia $(V,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Si dice *ortogonale* di W l'insieme:

$$W^\perp = \{v \in V \,|\, v \cdot w = 0, \forall w \in W\}.$$

1.12. Proposizione. *Sia $(V,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con prodotto scalare e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. Allora:*

i) $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

ii) $W \cap W^\perp = \{0_V\}$, quindi la somma di W e $W^\perp$ è diretta.

Dimostrazione. *i)* Siano $v_1, v_2 \in W^\perp$, cioè $v_1 \cdot w = 0$ e $v_2 \cdot w = 0$ per ogni $w \in W$; dunque, comunque scelti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \cdot w = \lambda_1 (v_1 \cdot w) + \lambda_2 (v_2 \cdot w) = 0$$

per ogni $w \in W$; pertanto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp$.
ii) Sia $w \in W \cap W^\perp$, allora $w \cdot w = 0$; dunque $w = 0_V$. $\square$

1.13. Osservazione. Sia $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_s) \subset V$. Allora

$$W^\perp = \{v \in V \,|\, v \cdot w_i = 0, \forall i = 1, \dots, s\}.$$

Infatti, l'inclusione " $\subseteq$ " è ovvia, mentre " $\supseteq$ " segue da 1.9.

1.13.1. Esempio. Sia $W = \mathcal{L}((1,0,1)) \subset E^3$. Per 1.13

$$W^\perp = \{(x,y,z) \in E^3 \,|\, (x,y,z) \cdot (1,0,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in E^3 \,|\, x + z = 0\}$$

cioè $W^\perp = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,0))$.

1.13.2. Esempio. Sia $W \subset E^4$ definito da

$$W = \mathcal{L}((1, -1, 1, 0), (2, 1, 0, 1)).$$

Ancora per 1.13

$$W^{\perp} = \left\{ (x, y, z, t) \in E^4 \;\middle|\; \begin{cases} (x, y, z, t) \cdot (1, -1, 1, 0) = 0 \\ (x, y, z, t) \cdot (2, 1, 0, 1) = 0 \end{cases} \right\}$$

dunque basta calcolare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + t = 0 \end{cases}$$

che sono, ad esempio,

$$\begin{cases} z = y - x \\ t = -2x - y \end{cases},$$

con x, y che non sono fissate dalle equazioni e prendono quindi valori arbitrari. Assegnando a essi i valori più semplici possibili $(x, y) = (1, 0)$ e $(x, y) = (0, 1)$, una possibile espressione per lo spazio ortogonale è data da $W^{\perp} = \mathcal{L}((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, -1))$.

2. Basi ortonormali

In uno spazio vettoriale con prodotto scalare, avendo introdotto le nozioni di ortogonalità e di norma, si può richiedere ai vettori di una base di verificare le analoghe proprietà geometriche degli elementi della terna naturale (la base) di $\mathcal{V}^3_O$, ovvero essere di norma 1 e mutuamente ortogonali.

2.1. Definizione. Sia $I = \{v_1, \dots, v_r\}$ con $v_i \in V$; I si dice *ortonormale* se i vettori v_i sono a due a due ortogonali ed hanno norma 1, cioè se

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \;; \\ 0, & \text{se } i \neq j \;. \end{cases}$$

2.2. Osservazione. Da 1.10 si ha che ogni insieme ortonormale è libero.

2.3. Definizione. Una base $\mathcal{B}$ di $(V, \cdot)$ si dice *ortonormale* se è un insieme ortonormale.

E' chiaro che la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ di $\mathcal{V}^3_O$ e la base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono basi ortonormali.

2.4. Osservazione. Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$ e sia $v \in V$; le componenti di v rispetto ad $\mathcal{B}$ assumono una forma particolare:

$$v = (v \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v \cdot e_n)e_n.$$

Infatti, se

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

basta considerare i prodotti scalari di v con i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$v \cdot e_1 = a_1, \quad \dots \quad , v \cdot e_n = a_n.$$

Pertanto le componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale si ottengono moltiplicando scalarmente il vettore per gli elementi della base scelta.

2.5. Definizione. Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$ e sia $v \in V$. I vettori $(v \cdot e_1)e_1, \dots, (v \cdot e_n)e_n$ in cui si decompone v si dicono *proiezioni ortogonali* di v lungo $e_1, \dots, e_n$, rispettivamente.

In un spazio vettoriale con prodotto scalare una base ortonormale gioca un ruolo centrale. Infatti con essa il prodotto scalare assume la stessa forma del prodotto scalare canonico in E^n.

2.6. Proposizione. *Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$ e siano $v, w \in V$. Posti $v = (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}$ e $w = (b_1, \dots, b_n)_{\mathcal{B}}$, allora*

$$v \cdot w = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Dimostrazione. Dalla bilinearità del prodotto scalare e dal fatto che $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. $\square$

Il seguente metodo non solo permette il calcolo di una base ortonormale negli esempi, ma prova anche, in generale, l'esistenza di una tale base. Esso prende il nome di procedimento di *ortonormalizzazione di Gram–Schmidt.*

2.7. Metodo di Gram–Schmidt. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di $(V, \cdot)$. Posti

$$e_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|}, \quad e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{\| v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1 \|} \quad , \dots, \quad e_n = \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1}(v_n \cdot e_i)e_i}{\| v_n - \sum_{i=1}^{n-1}(v_n \cdot e_i)e_i \|}$$

vogliamo dimostrare che $e_1, \dots, e_n$ costituiscono una base ortonormale di V.

Chiaramente $e_1, \dots, e_n$ hanno norma 1.
Verificheremo che $e_1, \dots, e_n$ sono a due a due ortogonali per induzione; cioè supporremo che $e_1, \dots, e_h$ siano a due a due ortogonali e proveremo allora che anche $e_1, \dots, e_{h+1}$ lo sono. Per l'ipotesi induttiva, basta provare che e_{h+1} è ortogonale a $e_1, \dots, e_h$. Sia dunque k un intero tale che $1 \le k \le h$, allora

$$\begin{aligned} e_{h+1} \cdot e_k &= \frac{v_{h+1} - \sum_{i=1}^{h}(v_{h+1} \cdot e_i)e_i}{\| v_{h+1} - \sum_{i=1}^{h}(v_{h+1} \cdot e_i)e_i \|} \cdot e_k = \frac{v_{h+1} \cdot e_k - \sum_{i=1}^{h}\left((v_{h+1} \cdot e_i)(e_i \cdot e_k)\right)}{\| v_{h+1} - \sum_{i=1}^{h}(v_{h+1} \cdot e_i)e_i \|} = \\ &= \frac{v_{h+1} \cdot e_k - v_{h+1} \cdot e_k}{\| v_{h+1} - \sum_{i=1}^{h}(v_{h+1} \cdot e_i)e_i \|} = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $e_i \cdot e_k = 0$ per l'ipotesi induttiva. Inoltre per 2.2 sono linearmente indipendenti e pertanto costituiscono una base ortonormale di V.

2.7.1. Esempio. Sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_2) \subset E^4$, dove $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1, 1)$; vogliamo determinare una base ortonormale di V con il metodo di Gram–Schmidt.

$$e_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right);$$

si ponga $f_2 = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$ e quindi $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} f_2 &= (0, 2, 1, 1) - \left((0, 2, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) = \\ &= (0, 2, 1, 1) - (1, 1, 0, 0) = (-1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Quindi

$$e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

2.8. Teorema. *Sia* $(V, \cdot)$ *di dimensione finita. Allora* V *ha una base ortonormale.*

Dimostrazione. Poiché V ha dimensione finita, ammette una base che basta ortonormalizzare con Gram–Schmidt. $\square$

2.9. Teorema. *Sia* $(V, \cdot)$ *di dimensione finita e sia* $\{e_1, \dots, e_r\}$ *un insieme ortonormale di vettori di* V*; allora si può completare tale insieme ad una base ortonormale* $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ *di* V*.*

Dimostrazione. Per il teorema di completamento ad una base (Cap. III, 4.15), si completi l'insieme libero $\{e_1, \dots, e_r\}$ ad una base

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$$

di V. Poi si ortonormalizzi $\mathcal{B}$; si noti che il metodo di Gram–Schmidt applicato a $\mathcal{B}$ non altera i primi r vettori, che sono già ortonormali. $\square$

2.10. Corollario. *Sia* $(V, \cdot)$ *di dimensione* n *e sia* W *un sottospazio vettoriale di* V*. Allora:*

i) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$*;*

ii) $V = W \oplus W^\perp$*;*

iii) $(W^\perp)^\perp = W$*.*

Dimostrazione. *i*) Sia $(e_1, \dots, e_r)$ una base ortonormale di W; si completi, per 2.9, ad una base ortonormale $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ di V. Poiché $e_{r+1}, \dots, e_n$ sono ortogonali ai precedenti vettori della base, sono ortogonali ad ogni vettore di W per 1.9; dunque $e_{r+1}, \dots, e_n \in W^\perp$. Pertanto $\dim(W^\perp) \geq n - r$, cioè $\dim(W) + \dim(W^\perp) \geq n$. D'altra parte per il punto ii) di 1.14. la somma di W e $W^\perp$ è diretta. quindi da 5.5. Cap III, si ha $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(W \oplus W^\perp) \leq n$ e ciò prova la tesi.

ii) Per *i*) si ha $\dim(W \oplus W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) = n = \dim(V)$ e quindi la tesi.

iii) Mostriamo dapprima che $(W^\perp)^\perp \supseteq W$.
Per definizione $(W^\perp)^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0, \ \forall w \in W^\perp\}$. Se $v \in W$, allora $v \cdot w = 0$ per ogni $w \in W^\perp$, dunque $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Si applichi ora la *i*) al sottospazio $W^\perp$: si ha

$$\dim(W^\perp) + \dim((W^\perp)^\perp) = n.$$

Confrontando tale uguaglianza con *i*), si ottiene $\dim((W^\perp)^\perp) = \dim(W)$. Quindi W e $(W^\perp)^\perp$ sono uno sottospazio dell'altro e hanno la stessa dimensione. Pertanto per 1.14 coincidono. $\square$

Si osservi che, l'uguaglianza $(W^\perp)^\perp = W$ vale poichè lo spazio ambiente V è finito dimensionale. In generale, vale l'inclusione $(W^\perp)^\perp \supseteq W$.

2.10.1. Esempio. Nell'esempio 1.13.1 abbiamo calcolato il sottospazio ortogonale del sottospazio W di E^3, dove $W = \mathcal{L}((1, 0, 1))$, ottenendo che $W^\perp = \mathcal{L}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$. Chiaramente

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = 1 + 2 = 3 = \dim(E^3).$$

Si può fare l'analoga verifica per i sottospazi dell'esempio 1.13.2.

3. Prodotto hermitiano

Il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ può essere esteso allo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^n$ con una semplice variazione.

3.1. Definizione. Si dice *prodotto hermitiano canonico* su $\mathbb{C}^n$ l'applicazione

$$\cdot : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$(z_1, \ldots, z_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n,$$

dove $\bar{\alpha}$ denota il complesso coniugato di un numero complesso α (vedi 4.1, Cap. I).
La coppia $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ si dice *spazio euclideo complesso* o *spazio hermitiano.*

L'applicazione precedente gode di proprietà simili al caso reale, delle quali omettiamo la dimostrazione.
Per denotare i vettori di $\mathbb{C}^n$ scriveremo $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ecc.

3.2. Proposizione. *Per ogni $z, w, v \in \mathbb{C}^n$ e $a, b \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà:*

i) $w \cdot z = \overline{z \cdot w}$;

ii) $(az + bw) \cdot v = \bar{a} z \cdot v + \bar{b} w \cdot v$; *mentre* $v \cdot (az + bw) = av \cdot z + bv \cdot w$;

iii) $z \cdot z = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$.

iv) $z \cdot z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$. □

Da notare che l'uso del complesso coniugato nella definizione del prodotto hermitiano è dovuto alla necessità che, come al punto *iii*), il prodotto scalare di un vettore per se stesso sia positivo. Inoltre dal punto *ii*) il prodotto hermitiano è *anti-lineare* nel primo argomento mentre continua ad aversi linearità sul secondo argomento.

Analogamente al caso reale, in $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ la norma di un vettore è definita come:

$$\| (z_1, \ldots, z_n) \| = \sqrt{(z_1, \ldots, z_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}.$$

Da notare che anche in questo caso la norma di un vettore è sempre non negativa e si annulla se e solo se il vettore è nullo, ovvero $z = 0_{\mathbb{C}^n} = (0, \ldots, 0)$.