Capitolo III
SPAZI VETTORIALI

1. Definizioni e prime proprietà

La nozione di spazio vettoriale può essere data su qualsiasi campo $\mathbb{K}$. Noi la daremo per il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (campo dei numeri reali) e menzioneremo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (campo dei numeri complessi). Il lettore avvertito può facilmente astrarre la definizione al caso generale.

1.1. Definizione. Sia V un insieme non vuoto. V si dice *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale* o *spazio vettoriale reale*, se:

a) in V è definita un'operazione di somma

$$s : V \times V \longrightarrow V \text{ denotata con } s(v, v') = v + v';$$

b) è definita un'operazione di prodotto esterno

$$p : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \text{ denotata con } p(k, v) = kv;$$

c) tali che:

1) esiste un elemento $0_V \in V$, neutro per "s", tale che $(V, +, 0_V)$ è un gruppo commutativo.

Inoltre, per ogni $k, k' \in \mathbb{R}$, per ogni $v, v' \in V$, sono verificate le seguenti proprietà

2) $(k + k')v = kv + k'v$

3) $k(v + v') = kv + kv'$

4) $k(k'v) = (kk')v$

5) $1v = v$, ove $1 = 1_{\mathbb{R}}$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono *vettori* e il vettore 0_V si dice *vettore nullo.*

1.2. Osservazione. Per le proprietà di gruppo (vedi Cap. I, 2.6), si ha che il vettore nullo è unico e che l'opposto, $-v$, di ogni elemento v di V è unico. Inoltre, vale la legge di semplificazione per la somma, cioè $v + w = v + u \Longrightarrow w = u$. Infatti, da $v + w = v + u$, aggiungendo ad ambo i membri $-v$ e applicando la proprietà associativa della somma, si ha la tesi.

Come già visto nel Capitolo II, gli insiemi $\mathcal{V}_O^2$ e $\mathcal{V}_O^3$ dei vettori geometrici del piano o dello spazio applicati nel punto O sono spazi vettoriali reali. La corrispondenza biunivoca $\mathcal{V}_O^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$ definita in Cap. II, Par.2 (in particolare l'Osservazione 2.10) suggeriscono le naturali definizioni di somma e di prodotto per uno scalare relativamente all'insieme $\mathbb{R}^3$. Più precisamente si ha:

1.3. Proposizione. *L'insieme* $\mathbb{R}^3$ *delle terne di numeri reali munito delle operazioni*

I. $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, *per ogni* $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

II. $a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3)$, *per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

è un $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Verifichiamo che valgono le proprietà elencate in 1.1.
Chiaramente a) e b) sono soddisfatte, in quanto $\mathbb{R}^3$ è chiuso rispetto alle operazione di somma e prodotto per uno scalare reale.
c) 1) Esiste l'elemento neutro rispetto alla somma: $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, in quanto, per come è definita la somma

$$(x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (x_1, x_2, x_3).$$

Inoltre $(\mathbb{R}^3, +, 0_{\mathbb{R}^3})$ è un gruppo commutativo; valgono infatti:

- proprietà associativa:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)+((y_1,y_2,y_3)+(z_1,z_2,z_3)) &= (x_1,x_2,x_3)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3) = \\ &= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3)) = \\ &= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3) = \\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)+(z_1,z_2,z_3) = \\ &= ((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))+(z_1,z_2,z_3)\end{aligned}$$

  dove l'eguaglianza centrale segue dall'associatività della somma che vale in $\mathbb{R}$.

- l'opposto di un vettore $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ è $(-x_1,-x_2,-x_3)$ che appartiene ancora a $\mathbb{R}^3$; infatti:

$$(x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3) = (x_1-x_1,x_2-x_2,x_3-x_3) = (0,0,0).$$

- proprietà commutativa della somma:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) &= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) = \\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3) = (y_1,y_2,y_3)+(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}$$

  dove l'eguaglianza centrale è conseguenza dalla proprietà commutativa della somma che vale in $\mathbb{R}$.

Restano da provare le proprietà $2), 3), 4), 5)$, cioè che per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ e comunque scelti $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ valgono:

$$(\lambda+\lambda')(x_1,x_2,x_3) = \lambda(x_1,x_2,x_3)+\lambda'(x_1,x_2,x_3)$$

$$\lambda((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = \lambda(x_1,x_2,x_3)+\lambda(y_1,y_2,y_3)$$

$$\lambda(\lambda'(x_1,x_2,x_3)) = (\lambda\lambda')(x_1,x_2,x_3)$$

$$1(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3).$$

Queste ultime verifiche vengono lasciate al lettore. □

ll fatto precedente si presta ad una generalizzazione naturale: se $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e si considera l'n-esimo prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$, cioè l'insieme delle n–uple ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^n = \{X = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$$

in tale insieme si definiscono le operazioni seguenti, ove $a \in \mathbb{R}$, $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$:

I. $(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$

II. $a(x_1,\ldots,x_n) = (ax_1,\ldots,ax_n)$.

Come nel caso di $\mathbb{R}^3$ si verifica facilmente che

1.4. Proposizione. *L'insieme $\mathbb{R}^n$, rispetto alle precedenti operazioni, è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.* $\square$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono *n-uple* in $\mathbb{R}$. Se $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora x_1 si dice *prima componente* di X, x_2 si dice *seconda componente* di X e, in generale, x_i si dice *i-esima componente* di X.

Si consideri ora l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in $\mathbb{R}$, cioè

$$\mathbb{R}[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

e in tale insieme si considerino le usuali operazioni tra polinomi, che conviene ricordare: comunque scelti i polinomi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

I. $f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$

II. $\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n$.

1.5. Proposizione. *L'insieme $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle precedenti operazioni, è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Ovviamente $\mathbb{R}[x]$ è chiuso rispetto alle 2 operazioni.
Il polinomio nullo (cioè quello avente tutti i coefficienti nulli) è l'elemento neutro per la somma: si indichi con $0_{\mathbb{R}[x]}$. Si osservi che l'opposto del polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ è il polinomio $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$ che si denota con $-f(x)$. Le restanti verifiche che $(\mathbb{R}[x], +, 0_{\mathbb{R}[x]})$ è un gruppo commutativo sono lasciate al lettore.
Analogamente, è facile verificare i punti $2), 3), 4), 5)$ della definizione di $\mathbb{R}$–spazio vettoriale. $\square$

1.5.1. Esempio. Sia $\mathbb{R}[x]_r$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di grado minore o uguale ad r, ove r è un fissato numero naturale. Poiché il grado del polinomio somma è minore o uguale al grado dei polinomi addendi (vedi Cap. I, 3.4), $\mathbb{R}[x]_r$ è chiuso rispetto all'operazione somma; inoltre, poiché il grado di $\lambda f(x)$ è uguale al grado di $f(x)$, per ogni $\lambda \neq 0$, il sottoinsieme $\mathbb{R}[x]_r$ è chiuso rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare. Si verifica facilmente che $\mathbb{R}[x]_r$ è anch'esso un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

1.6. Osservazione. Il lettore si sarà probabilmente accorto che, nel verificare che gli insiemi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{R}[X]_r$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, si utilizza essenzialmente la struttura di campo di $\mathbb{R}$. Cioè le proprietà delle operazioni definite in tali spazi si riconducono alle corrispondenti proprietà delle operazioni in $\mathbb{R}$.

1.6.1. Esempio. Come abbiamo fatto prima per $\mathbb{R}^n$, si può dare anche a $\mathbb{C}^n$, ovvero l'insieme delle *n-uple* di numeri complessi, una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le medesime operazioni. Infatti il prodotto di un numero reale per un numero complesso è a sua volta un numero complesso, quindi $\mathbb{C}^n$ risulta chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare reale.
D'altra parte, si può dare a $\mathbb{C}^n$ una struttura di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. A tale scopo si lascia invariata l'operazione I e si estende a $\mathbb{C}$ l'operazione II, ottenenendo

II'. $a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$, ove $a \in \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Si lascia al lettore la verifica che tutte le proprietà di spazio vettoriale sono soddisfatte per tutt'e due le strutture.

Vediamo ora alcune proprietà elementari degli spazi vettoriali.

1.7. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale; allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ si ha:*

i) $0_{\mathbb{R}}\, v = 0_V$;

ii) $k0_V = 0_V$;

iii) $kv = 0_V \Longrightarrow k = 0_{\mathbb{R}}$ *oppure* $v = 0_V$;

iv) $(-k)v = -(kv) = k(-v)$.

Dimostrazione. i) Si osservi che

$$0_{\mathbb{R}}\, v = (0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}})v = 0_{\mathbb{R}}\, v + 0_{\mathbb{R}}\, v$$

e dalla legge di semplificazione per la somma segue $0_{\mathbb{R}}\, v = 0_V$.
ii) Analogamente si ha

$$k0_V = k(0_V + 0_V) = k0_V + k0_V$$

dunque, dalla legge di semplificazione, $k0_V = 0_V$.
iii) Sia $k \neq 0$; allora esiste $k^{-1} \in \mathbb{R}$. Dunque

$$v = 1v = k^{-1}kv = k^{-1}0_V = 0_V$$

ove l'ultima eguaglianza segue da *ii*).
iv) Dalla distributività del prodotto rispetto alla somma si ha

$$kv + (-k)v = (k + (-k))v = 0_{\mathbb{R}}v = 0_V$$

per *i*); da cui la prima uguaglianza. Analogamente

$$kv + k(-v) = k(v - v) = k0_V = 0_V$$

da cui la seconda. □

1.8. Osservazione. Le proprietà i), ii), iii) si possono riassumere con la seguente *legge di annullamento del prodotto*

$$kv = 0_V \Longleftrightarrow k = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{o} \quad v = 0_V.$$

Tra i sottoinsiemi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V individueremo e studieremo quelli che ereditano da V una struttura di spazio vettoriale.

2.1. Definizione. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni (interna) s di somma ed (esterna) p di prodotto per uno scalare (vedi 1.1) e sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Diremo che W è un *sottospazio vettoriale* di V se, **rispetto a s e p come definite per V**, l'insieme W ha una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Allo scopo di stabilire quando un sottoinsieme di uno spazio vettoriale sia un suo sottospazio, vengono introdotti i seguenti "criteri".

2.2. Proposizione. *Sia W un sottoinsieme non vuoto di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

i) W è un sottospazio vettoriale di V;

ii) W è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare, cioè

- *a) per ogni $w, w' \in W$ si ha $w + w' \in W$;*
- *b) per ogni $k \in \mathbb{R}$, per ogni $w \in W$ si ha $kw \in W$;*

iii) per ogni $k, k' \in \mathbb{R}$, per ogni $w, w' \in W$ si ha $kw + k'w' \in W$.

Dimostrazione. $i) \Longrightarrow ii)$ e $ii) \Longrightarrow iii)$ sono ovvie.
$iii) \Longrightarrow ii)$ Per provare $a)$, basta prendere $k = k' = 1$; per provare $b)$ basta prendere $k' = 0_{\mathbb{R}}$.
$ii) \Longrightarrow i)$ Innanzitutto W è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto, per ipotesi. Le proprietà associativa e commutativa e le proprietà distributive valgono in V e quindi in W. Basta dunque mostrare che W ha zero e l'opposto di ogni suo elemento. Si osservi che se $0_V \in W$ allora 0_V è zero di W, infatti per ogni $w \in W$ si ha $0_V + w = w + 0_V = w$ poiché $w \in V$. Per $ii, b)$, $0_{\mathbb{R}}w \in W$, per ogni $w \in W$. D'altra parte, per 1.7, $0_{\mathbb{R}}w = 0_V$; dunque $0_V \in W$. Infine, se $w \in W$, sempre per 1.7, $-w = (-1)w \in W$. $\square$

2.2.1. Esempio. Se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora $V \subseteq V$ è un suo sottospazio; inoltre $\{0_V\}$ verifica 2.2 $iii)$, dunque è un sottospazio di V.
I sottospazi $\{0_V\}$ e V, non contribuendo a dare informazioni su V, si dicono *sottospazi banali.*

2.2.2. Esempio. Abbiamo già visto che $\mathbb{R}[x]_r \subseteq \mathbb{R}[x]$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali rispetto alle stesse operazioni; dunque $\mathbb{R}[x]_r$ è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

2.2.3. Esempio. Sia $v \in V$ un vettore non nullo; si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{L}(v) = \{av \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Siano $w = av$ e $w' = a'v$ due elementi di $\mathcal{L}(v)$. Poiché

$$\alpha w + \alpha' w' = (\alpha a + \alpha' a')v \in \mathcal{L}(v)$$

per ogni $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, allora, per $2.2, iii)$, $\mathcal{L}(v)$ è un sottospazio vettoriale di V e si dice *retta vettoriale* generata da v.

2.2.4. Esempi. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:
$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$;
$W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$;
$W_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$;
$W_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$.
Dall'esempio precedente, si ha che $W_1 = \mathcal{L}((3,1))$ e quindi si tratta di una retta vettoriale.
Gli altri sottoinsiemi non sono sottospazi, infatti: $(0,0) \notin W_2$; W_3 e W_4 non sono chiusi rispetto al prodotto per uno scalare, in quanto, ad esempio, $(1,0) \in W_3$, mentre si ha che $1/2(1,0) = (1/2,0) \notin W_3$. Analogamente $(1,1) \in W_4$, mentre $2(1,1) = (2,2) \notin W_4$, come si verifica facilmente.

Dati due o più sottospazi vettoriali di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, vediamo ora come sia possibile, mediante opportune "operazioni", costruirne altri.

2.3. Proposizione. *Siano W_1 e W_2 due sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $v, w \in W_1 \cap W_2$. Da 2.2 segue che $av + bw \in W_1$ in quanto W_1 è un sottospazio vettoriale; analogamente $av + bw \in W_2$; dunque $av + bw \in W_1 \cap W_2$. Applicando ancora 2.2 si ha la tesi. □

2.4. Osservazione. L'unione di due sottospazi vettoriali non è, in generale, un sottospazio vettoriale. Si considerino, ad esempio due rette vettoriali distinte, $\mathcal{L}(v)$ e $\mathcal{L}(v')$, di $\mathbb{R}^2$. È evidente che $\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(v')$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, in quanto non è chiuso rispetto alla somma, come si può vedere dalla figura.

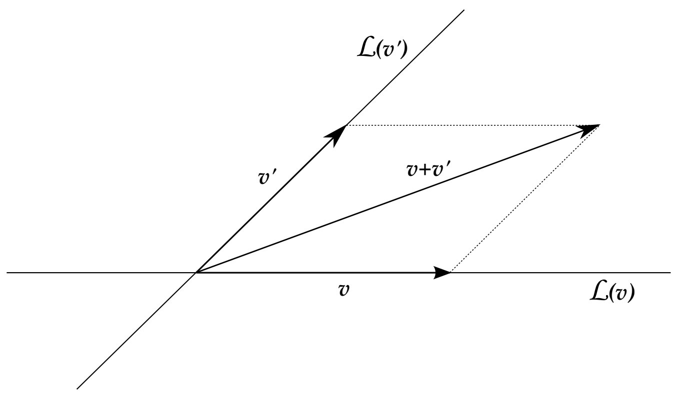

Figura 10

2.5. Proposizione. *Siano W_1 e W_2 due sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V e si denoti con*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2;\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}.$$

Allora $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $W_1 \cup W_2$.

Dimostrazione. Siano $a, a' \in \mathbb{R}$ e $v, v' \in W_1 + W_2$; sarà dunque $v = w_1 + w_2$; $v' = w_1' + w_2'$, ove $w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$. Poiché

$$av + a'v' = aw_1 + aw_2 + a'w_1' + a'w_2' = (aw_1 + a'w_1') + (aw_2 + a'w_2')$$

tenendo conto del fatto che W_1 e W_2 sono sottospazi, si ha $aw_1 + a'w'_1 \in W_1$ e $aw_2 + a'w'_2 \in W_2$. Ne segue che $W_1 + W_2$ è un sottospazio vettoriale di V.
Inoltre $W_1 + W_2 \supseteq (W_1 \cup W_2)$, infatti se $w_1 \in W_1$, allora $w_1 = w_1 + 0_V$ appartiene a $W_1 + W_2$; analogamente si prova che $W_2 \subset W_1 + W_2$.
Sia ora Z un sottospazio di V contenente $W_1 \cup W_2$. Allora, per ogni $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ deve essere $w_1 + w_2 \in Z$. Da cui: $Z \supseteq W_1 + W_2$. Quindi $W_1 + W_2$ è il più piccolo di tali sottospazi. □

2.6. Definizione. Siano W_1 e W_2 due sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Il sottospazio vettoriale $W_1 + W_2$ è detto *sottospazio somma* di W_1 e W_2.

La proposizione precedente si generalizza facilmente e quindi si può dare la seguente

2.7. Definizione. Siano $W_1, \dots, W_n$ sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Il sottospazio vettoriale

$$W_1 + \cdots + W_n = \{v \in V \mid v = w_1 + \cdots + w_n;\ w_i \in W_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

è detto *sottospazio somma* di $W_1, \dots, W_n$.

2.8. Definizione. Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V. Allora la somma $W_1 + W_2$ si dice *diretta* se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. In tal caso scriveremo $W = W_1 \oplus W_2$.

2.9. Proposizione. *Siano W_1, W_2 due sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. La loro somma $W = W_1 + W_2$ è diretta se e solo se ogni suo elemento v si scrive in modo unico nella forma $v = w_1 + w_2$ con $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che la somma $W_1 + W_2$ sia diretta, ovvero $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Se esistesse $v \in W_1 + W_2$ con $v = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$, con $w_i, w'_i \in W_i$, allora $w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2$ e tale elemento appartiene sia a W_1 che a W_2. Dunque, per ipotesi deve essere nullo, quindi $w_1 = w'_1$ e $w'_2 = w_2$ e ciò prova la tesi.
Viceversa, supponiamo che ogni vettore $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico nella forma $v = w_1 + w_2$ con $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Sia $v \in W_1 \cap W_2$; allora $v \in W_1$ e $v \in W_2$, quindi $0_V = v - v \in W_1 + W_2$. D'altro canto $0_V = 0_V + 0_V$ e, poiché tale scrittura è unica per ipotesi, ne segue $v = 0_V$. □

La proposizione precedente conduce in modo naturale a generalizzare la nozione di somma diretta a un numero qualunque di sottospazi:

2.10. Definizione. Siano $W_1, \dots, W_n$ sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Diremo che la somma $W = W_1 + \cdots + W_n$ è *diretta* se ogni suo elemento v si scrive in modo unico nella forma $v = w_1 + \cdots + w_n$ con $w_i \in W_i$, $i = 1, \dots, n$. In tal caso scriveremo $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

3. Combinazioni lineari

Studiando $\mathcal{V}_O^3$, abbiamo visto come ogni vettore geometrico $\mathbf{v}$ si possa rappresentare nella forma $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$: diremo che $\mathbf{v}$ è "combinazione lineare" di $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Inoltre tale scrittura è unica; questa proprietà si esprime usualmente dicendo che $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono "linearmente indipendenti". In questo paragrafo cercheremo di estendere ad uno spazio vettoriale qualunque i precedenti concetti.

3.1. Definizione. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Un vettore $v \in V$ si dice *combinazione lineare* di $v_1, \dots, v_n$ se esistono n scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_n$ si indica con $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.
In generale, se I è un qualunque sottoinsieme di V (anche non finito), con $\mathcal{L}(I)$ si denota l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari (finite) di vettori di I, cioè

$$\mathcal{L}(I) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in I, n \in \mathbb{N}\}.$$

3.2. Proposizione. $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ *è un sottospazio vettoriale di* V*, detto spazio generato da* $v_1, \dots, v_n$.

Dimostrazione. Per il criterio della Prop. 2.2, è sufficiente mostrare che $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ è chiuso rispetto alla somma di vettori e al prodotto per uno scalare. Siano $v, w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$; dunque $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. Applicando la proprietà 2) nella definizione 1.1, si ha che

$$v + w = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

Sia poi $\alpha \in \mathbb{R}$; allora, usando la proprietà 4) di 1.1, si ha $\alpha v = (\alpha\lambda_1)v_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n)v_n$, ovvero $\alpha v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. $\square$

3.2.1. Esempi. 1) È chiaro che $\mathcal{V}_O^2 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$; $\mathcal{V}_O^3 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
2) Siano $v = (1, 0, -1)$ e $w = (2, 0, 0)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora $\mathcal{L}(v, w)$ è contenuto propriamente in $\mathbb{R}^3$; infatti, ad esempio, $(0, 1, 0) \notin \mathcal{L}(v, w)$. Altrimenti, dovrebbero esistere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(0, 1, 0) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 0, 0) = (\alpha + 2\beta, 0, -\alpha).$$

Eguagliando le componenti, si ottiene la relazione $1 = 0$, che è palesemente falsa.

È un problema interessante cercare sottoinsiemi I di V tali che $\mathcal{L}(I) = V$. È chiaro che $V = \mathcal{L}(V)$. Dagli esempi noti, si può osservare comunque che esistono sottoinsiemi propri $I \subset V$ tali che $V = \mathcal{L}(I)$. Ad esempio $\mathcal{V}_O^2 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e $\mathcal{V}_O^3 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dunque entrambi sono generati da un numero finito di vettori. Tale situazione non è però generale. Si consideri il seguente

3.2.2. Esempio. Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[x]$ non è generato da un numero finito di vettori. Siano $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomi arbitrari. Allora ogni $p(x) \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$ è del tipo

$$p(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x).$$

Posto $d_i = deg(f_i)$ e $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$, per 3.4, Cap. I, si ha

$$\deg(p(x)) = \deg(\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)) \leq \max\{d_1, \dots, d_n\} = d.$$

Ne segue che $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$ è contenuto strettamente in $\mathbb{R}[x]$, in quanto, ad esempio, $x^{d+1} \in \mathbb{R}[x]$ ma $x^{d+1} \notin \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$. Pertanto $\mathbb{R}[x]$ non può essere generato da un numero finito di polinomi.

Si osservi d'altra parte che $\mathbb{R}[x]$ è generato dall'insieme infinito $\{1, x, x^2, \dots, x^i, \dots\}$.

3.3. Definizione. Un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V si dice *finitamente generato* se esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$; in tal caso $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice *sistema di generatori* di V.

3.4. Proposizione. *Sia I un sottoinsieme di V e sia $v \in V$. Allora*

$$\mathcal{L}(\{v\} \cup I) = \mathcal{L}(I) \Longleftrightarrow v \in \mathcal{L}(I).$$

Dimostrazione.
" $\Rightarrow$ " Supponiamo che $\mathcal{L}(\{v\} \cup I) = \mathcal{L}(I)$. Poiché $v \in \mathcal{L}(\{v\} \cup I)$ allora $v \in \mathcal{L}(I)$.
" $\Leftarrow$ " Per semplicità proviamolo nel caso in cui I sia un insieme finito $\{v_1, \dots, v_n\}$.
Dobbiamo provare che $\mathcal{L}(\{v\} \cup I) \subseteq \mathcal{L}(I)$ (l'altra inclusione è ovvia). Si consideri un generico vettore $w \in \mathcal{L}(\{v\} \cup I)$, dunque $w = \alpha v + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$.
Per ipotesi, $v \in \mathcal{L}(I)$ e quindi $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Pertanto

$$w = \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Per le proprietà delle due operazioni dello spazio vettoriale V, si ottiene immediatamente che $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{L}(I)$, come volevamo. $\square$

3.5. Osservazione. E' immediata conseguenza della Proposizione precedente il seguente fatto: se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono vettori qualunque, allora

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, 0_V) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

Se I è un sistema di generatori di V, ci si chiede se esiste dentro I un insieme "minimale" di generatori di V, ovvero se esiste 'un più piccolo' $J \subset I, J \neq I$, tale che $\mathcal{L}(J) = \mathcal{L}(I) = V$. A tale scopo si introduce la nozione di indipendenza lineare.

3.6. Definizione. Dato un insieme $I = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, tali vettori si dicono *linearmente indipendenti* su $\mathbb{R}$ se il vettore nullo si ottiene come loro combinazione lineare soltanto con coefficienti nulli; ovvero

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}.$$

In tal caso l'insieme I si dice *libero*. Un insieme infinito $I \subseteq V$ si dice *libero* se ogni suo sottoinsieme finito è libero, nel senso definito sopra.
Viceversa, n vettori si dicono *linearmente dipendenti* se non sono linearmente indipendenti, cioè se esistono n scalari $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$.

3.6.1. Esempio. E' chiaro che $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti in $\mathcal{V}_O^3$. Mentre i vettori $v_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $v_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $v_3 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sono linearmente dipendenti; infatti $2v_1 - 3v_2 - v_3 = 0$.

3.7. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $I = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori di V. Valgono le seguenti proprietà:*

i) se $0_V \in I$ allora I non è libero;

ii) I non è libero se e solo se almeno uno tra i v_i è combinazione lineare degli altri;

iii) se I non è libero e $J \supseteq I$, allora J non è libero;

iv) se I è libero e $J \subseteq I$, allora J è libero, cioè ogni sottoinsieme di un insieme libero è libero.

Dimostrazione. *i)* Supponiamo, per semplicità, che sia nullo il primo vettore di I, ovvero che $v_1 = 0_V$. E' immediato trovare una combinazione lineare dei vettori di I, non tutta nulla, che sia uguale al vettore nullo, infatti:

$$1_{\mathbb{R}} v_1 + 0_{\mathbb{R}} v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{R}} v_n = 0_V$$

per la Prop. 1.7 applicata ad ogni addendo della somma precedente.
ii) Supponiamo che I non sia libero; allora esistono n scalari reali, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$. Per semplicità, supponiamo che sia $\lambda_1 \neq 0$; allora si ha

$$v_1 = \lambda_1^{-1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) \in \mathcal{L}(v_2, \dots, v_n).$$

Viceversa, se esiste un vettore v_i combinazione lineare degli altri, cioè

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

allora si ha

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

e i coefficienti di tale combinazione lineare non sono tutti nulli, in quanto il coefficiente di v_i è -1.
Le dimostrazioni di *iii)* e *iv)* sono lasciate al lettore. □

Allo scopo di determinare un sistema di generatori avente il minor numero possibile di elementi e, eventuamente, determinare tale numero, proviamo i seguenti fatti:

4.1. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

i) $v_1, \ldots, v_n$ *sono linearmente indipendenti;*

ii) $v_1 \neq 0_V$ *e* v_i *non è combinazione lineare di* $v_1, \ldots, v_{i-1}$*, per ogni* $i \geq 2$.

Dimostrazione. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* è ovvio, per 3.7 *i)* e *ii)*.
ii) $\Longrightarrow$ *i)* Sia $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$. Per ipotesi v_n non è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{n-1}$; dunque deve essere $\lambda_n = 0$, altrimenti $v_n = \lambda_n^{-1}(-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{n-1}v_{n-1})$.
Si ha quindi $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1}v_{n-1} = 0_V$; ragionando analogamente si ottiene $\lambda_{n-1} = 0$. Dopo $n-1$ passi si ha $\lambda_1 v_1 = 0$ e, poiché v_1 è supposto non nullo, per 1.5. deve essere anche $\lambda_1 = 0$. □

4.2. Teorema. *(***Metodo degli scarti successivi***). Ogni insieme finito di generatori di uno spazio vettoriale contiene un sistema libero di generatori.*

Dimostrazione. Sia $I = \{v_1, \ldots, v_s\}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Per l'Osservazione 3.5, possiamo supporre che tutti i vettori di I siano non nulli.
Definiamo ricorsivamente una catena di sottoinsiemi di I nel seguente modo:

- poniamo $I_1 := I = \{v_1, \ldots, v_s\}$;
- se $v_2 \in \mathcal{L}(v_1)$, allora si pone $I_2 := I_1 \setminus \{v_2\}$; altrimenti sia $I_2 = I_1$;
- se $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$, allora si pone $I_3 := I_2 \setminus \{v_3\}$; altrimenti sia $I_3 = I_2$.

Iterando il procedimento, si esamina ogni vettore di I_1 e si elimina se è combinazione lineare dei precedenti. Dopo s passi si è costruita una catena $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_s$ di sottoinsiemi di I.
-) Si osservi che, per ogni $j = 2, \ldots, s$, si ha $\mathcal{L}(I_j) = \mathcal{L}(I_{j-1})$. Infatti se $I_j = I_{j-1}$, tale fatto è ovvio. Altrimenti i due insiemi differiscono per un vettore e precisamente $I_{j-1} = I_j \cup \{v_j\}$, dove $v_j \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{j-1}) \subseteq \mathcal{L}(I_{j-1})$. Anche in tal caso, per 3.4, si ha $\mathcal{L}(I_j) = \mathcal{L}(I_{j-1})$.
-) Pertanto $\mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(I_1) = \cdots = \mathcal{L}(I_s)$, quindi I_s è un sistema di generatori di V.
-) Infine, per la Prop. 4.1, l'insieme I_s è libero, essendo nessuno dei suoi vettori combinazione lineare dei precedenti. □

4.3. Definizione. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Un insieme ordinato $I = (v_1, \ldots, v_n)$ di vettori di V si dice *base* di V se I è un sistema libero di generatori, cioè $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ ed inoltre $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Dal teorema 4.2 si ha immediatamente il seguente

4.4. Corollario. *Ogni insieme finito di generatori di uno spazio vettoriale contiene (almeno) una base; quindi ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.* □

4.4.1. Esempio. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ l'insieme di vettori $I = \{v_1, \ldots, v_5\}$ con

$$v_1 = (1, 1, -1),\ v_2 = (-2, -2, 2),\ v_3 = (2, 0, 1),\ v_4 = (1, -1, 2),\ v_5 = (0, 1, 1).$$

Vogliamo determinare una base dello spazio $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ con il metodo degli scarti successivi.
Al primo passo $I_1 = I$. Dato che $v_2 = -2v_1$, allora $v_2 \in \mathcal{L}(v_1)$, quindi si elimina e $I_2 = I_1 \setminus \{v_2\}$.
D'altra parte $v_3 \notin \mathcal{L}(v_1)$, dunque v_3 non si elimina e $I_3 = I_2$.
E' chiaro che $v_4 \in \mathcal{L}(v_1, v_3)$ se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_3$, cioè $(1, -1, 2) = (\alpha + 2\beta, \alpha, -\alpha + \beta)$. Uguagliando le componenti, si ricava $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
Dunque $v_4 = -v_1 + v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_3)$; pertanto v_4 si elimina e $I_4 = I_3 \setminus \{v_4\}$.
Analogamente si verifica che $v_5 \notin \mathcal{L}(v_1, v_3)$; pertanto la base richiesta è $I_5 = I_4 = (v_1, v_3, v_5)$.

Una proprietà caratterizzante gli insiemi liberi è la seguente:

4.5. Teorema. *Un insieme di vettori $I = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è libero se e solo se ogni elemento di $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei v_i.*

Dimostrazione. Supponiamo che I sia libero e che esista un vettore $v \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ che si possa scrivere in due modi:

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Allora $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0_V$. Dal fatto che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti segue che tutti i coefficienti si devono annullare, ovvero

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \cdots \quad , \lambda_n - \mu_n = 0$$

cioè $\lambda_i = \mu_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Pertanto le due scritture iniziali di v coincidono.
Viceversa, supponiamo che ogni elemento di $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori v_i. In particolare $0_V \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ si può scrivere soltanto come $0_V = 0_{\mathbb{R}}v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{R}}v_n$. Supponiamo ora che sia $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$; per l'unicità suddetta deve essere $\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti. □

4.6. Corollario. *Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale V. L'insieme $I = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V se e solo se ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.* □

4.7. Definizione. Se $I = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V e $v \in V$ allora $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$; in tal caso gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (univocamente determinati per 4.6) si dicono *componenti* di v *rispetto alla base* I. Per evidenziare ciò introduciamo la seguente notazione:

$$v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_I.$$

4.8. Osservazione. Si noti che gli insiemi liberi e i sistemi di generatori non sono insiemi ordinati, mentre le basi lo sono. In seguito il lettore si renderà conto di questa scelta, dovuta al fatto che spesso conviene lavorare con le componenti di un vettore rispetto ad una base, piuttosto che col vettore stesso. Per tale scelta, le componenti di un vettore rispetto ad una base sono n-uple *ordinate* di scalari. Ad esempio se $I = (v_1, v_2)$ è una base di V, allora anche $J = (v_2, v_1)$ è una base di V. Si osservi che I e J sono uguali come sistemi di generatori, ma distinti come basi.

4.8.1. Esempio. Poste $\mathcal{E} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e $\mathcal{E}' = (\mathbf{j}, \mathbf{i})$ due basi di $\mathcal{V}_O^2$, il vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ha componenti diverse rispetto alle due basi:

$$\mathbf{v} = (2, 3)_{\mathcal{E}} = (3, 2)_{\mathcal{E}'}.$$

4.9. Osservazione. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ delle n-uple, si considerino i vettori

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, n) \end{aligned} .$$

Si vede che $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se $v = (x_1, \dots, x_n)$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$, allora v si scrive in modo unico come combinazione lineare degli e_i:

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

4.10. Definizione. La base $\mathcal{E}$ definita nell'esempio precedente si dice *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

In particolare, se $n = 2$, la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, dove $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Se $n = 3$, la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, dove $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

4.11. Osservazione. Un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale diverso da $\mathbb{R}^n$ non è dotato di base canonica. Tuttavia, in alcuni casi, ci sono basi più naturali di altre, come mostrano i seguenti esempi.

4.11.1. Esempio. Facendo riferimento all'esempio 1.6.1, si osservi che $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale generato dagli elementi 1 e i, poiché ogni numero complesso è della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre 1 e i sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e costituiscono dunque una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$.
Più in generale, $\mathbb{C}^n$ ha una duplice struttura: quella di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e quella di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Rispetto alla prima, $\mathbb{C}^n$ è dotato di base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ con i vettori elementi dati nell'Osservazione 4.9. In particolare la base canonica di $\mathbb{C}^2$ è $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, con $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Mentre come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, non essendo uno spazio del tipo $\mathbb{R}^n$, non ha base canonica. Ha però una base naturale $\mathcal{B} = (b_1, c_1 \dots, b_n, c_n)$ costituita dai $2n$ vettori:

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ c_1 &= (i, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ b_n &= (0, 0, \dots, 1) \\ c_n &= (0, 0, \dots, i) \end{aligned}$$

In particolare, nel caso di $\mathbb{C}^2$, la base precedente prende la forma $\mathcal{B} = (b_1, c_1, b_2, c_2)$, ove $b_1 = (1, 0)$, $c_1 = (i, 0)$, $b_2 = (0, 1)$, $c_2 = (0, i)$.

4.11.2. Esempio. Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[x]_d$ ha una base naturale, costituita dai monomi $(1, x, x^2, \dots, x^d)$ di grado $\leq d$. Infatti ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]_d$ è della forma (univocamente determinata):

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_d x^d$$

con $a_i \in \mathbb{R}$.

4.12. Osservazione. Abbiamo visto nel Cap. II come le operazioni tra vettori di $\mathcal{V}^3_O$ possono essere descritte in termini di componenti. Tale situazione si generalizza come segue.

Sia $I = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V. Siano $v, w \in V$ e $a \in \mathbb{R}$; con la notazione precedente siano $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_I$ e $w = (\mu_1, \dots, \mu_n)_I$. Calcoliamo le componenti, rispetto ad I, di $v + w$ e di av.

$$v + w = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) v_n.$$

Dunque
$$v + w = (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)_I.$$
Inoltre
$$av = a(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = (a\lambda_1)v_1 + \cdots + (a\lambda_n)v_n.$$
Dunque
$$av = (a\lambda_1, \ldots, a\lambda_n)_I.$$
Pertanto le componenti del vettore somma di due vettori sono la somma delle componenti corrispondenti degli addendi; le componenti del vettore prodotto di uno scalare per un vettore dato si comportano nello stesso modo. Infine, dalle proprietà precedenti di somma e prodotto, si ha che, se $z = av + bw$ e, rispetto alla base I, $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)_I$, allora
$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)_I = (a\lambda_1 + b\mu_1, \ldots, a\lambda_n + b\mu_n)_I$$
o, equivalentemente
$$\xi_i = a\lambda_i + b\mu_i$$
per ogni $i = 1, \ldots, n$.
Quest'ultimo fatto si generalizza immediatamente con la seguente

4.13. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $I = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V. Siano*
$$w_1 = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n})_I, \;\; w_2 = (\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2n})_I, \; \ldots \;, \;\; w_s = (\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sn})_I$$
s vettori di V. Sia inoltre $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)_I$. Allora
$$z = a_1 w_1 + \cdots + a_s w_s \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_i = a_1\lambda_{1i} + \cdots + a_s\lambda_{si} \quad \text{per ogni } i$$
cioè la i-esima componente di una combinazione lineare di vettori è data dalla combinazione lineare (con i medesimi coefficienti) delle i-esime componenti dei vettori considerati. □

4.14. Corollario. *Con le notazioni precedenti, si hanno i seguenti fatti:*

a) $w_1, \ldots, w_s$ sono linearmente indipendenti in V se e solo se le corrispondenti n-uple di componenti $(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}), \ldots, (\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sn})$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$;

b) $w_1, \ldots, w_s$ sono un sistema di generatori di V se e solo se le corrispondenti n-uple di componenti $(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}), \ldots, (\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sn})$ generano $\mathbb{R}^n$. □

Vediamo infine come un insieme libero possa essere completato ad una base.

4.15. Teorema (Completamento ad una base). *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora ogni insieme libero finito di elementi di V è contenuto in una base.*

Dimostrazione. Sia $I = \{v_1, \ldots, v_s\}$ un insieme libero di vettori di V. Per 4.4, V ammette una base; sia essa $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si consideri l'insieme $I \cup \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_s, e_1, \ldots, e_n\}$. Chiaramente $I \cup \mathcal{B}$ è ancora un sistema di generatori per V. Applicando a tale insieme il metodo degli scarti successivi, non vengono eliminati i primi s vettori, poiché sono linearmente indipendenti (vedi 4.1) e si perviene ad un sistema libero di generatori, cioè ad una base di V contenente I. □

5. Dimensione

Abbiamo visto che lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^3$ è in corrispondenza biunivoca con i punti dello spazio (vedi Cap. II) e quindi potremmo dire, intuitivamente, che ha “dimensione” 3. D'altra parte abbiamo visto che $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ formano una base di $\mathcal{V}_O^3$ costituita da 3 elementi. In generale si può provare il seguente risultato:

5.1. Teorema. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale avente una base di n elementi. Allora:*

i) *ogni insieme libero di V è finito e ha al più n elementi;*

ii) *ogni sistema di generatori di V ha almeno n elementi;*

iii) *ogni base di V ha n elementi.* $\square$

Il teorema precedente risponde affermativamente alla questione iniziale riguardante la determinazione di un sistema di generatori minimale.

Inoltre si prova che il numero di vettori costituenti una qualunque base è costante, si tratta cioè di un invariante dello spazio vettoriale. Possiamo dunque dare la seguente

5.2. Definizione. Se esiste un intero positivo n tale che lo spazio vettoriale reale V ammetta una base di n elementi, diremo che V ha *dimensione* n e scriveremo $\dim(V) = n$. Se invece V non è finitamente generato, si pone $\dim(V) = \infty$. Infine se $V = \{0_V\}$ poniamo $\dim(V) = 0$.

5.2.1. Esempi. Per quanto visto in precedenza: $\dim \mathcal{V}_O^2 = 2$ e $\dim \mathcal{V}_O^3 = 3$. Inoltre $\dim \mathbb{R}^n = n$, in particolare $\dim \mathbb{R} = 1$. Ancora $\dim \mathbb{R}[X] = \infty$ e $\dim \mathbb{R}[X]_d = d + 1$.
Infine $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ mentre $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

Valgono i seguenti risultati, di cui omettiamo le dimostrazioni.

5.3. Proposizione. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia W un sottospazio di V. Allora $\dim(W) \leq n$. Inoltre $\dim(W) = n$ se e solo se $W = V$.* $\square$

5.4. Corollario. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sono equivalenti le affermazioni:*

i) $(v_1, \ldots, v_n)$ *è una base di V;*

ii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è un insieme libero;*

iii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è un sistema di generatori di V.* $\square$

5.5. Teorema di Grassmann. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita e siano U e W due sottospazi di V. Allora si ha*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Dimostrazione. Siano $r = \dim(U)$, $s = \dim(W)$, $p = \dim(U \cap W)$. Vogliamo provare che esiste una base di $U + W$ costituita da $r + s - p$ elementi.

Sia $(v_1, \ldots, v_p)$ una base di $U \cap W$; per il teorema 4.15, è possibile completare tale insieme libero ad una base $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{r-p})$ di U e ad una base $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{s-p})$ di W.
Proviamo che $I = (v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{r-p}, w_1, \ldots, w_{s-p})$ è una base dello spazio vettoriale $U + W$. Poiché ogni vettore di $U + W$ è della forma $u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$ e poiché u si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{r-p}$ e w si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{s-p}$, ovviamente I genera $U + W$.
Sia ora

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{r-p} u_{r-p} + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{s-p} w_{s-p} = 0_V.$$

Per brevità poniamo $v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$, $u = \sum_{j=1}^{r-p} \beta_j u_j$ e $w = \sum_{k=1}^{s-p} \gamma_k w_k$.
Dunque l'uguaglianza precedente diventa

$$v + u + w = 0_V, \quad \text{con} \quad v \in U \cap W, u \in U, w \in W.$$

Visto che $v, u \in U$, allora $w = -v - u \in U$; dunque $w \in (U \cap W)$. Ciò implica che

$$w = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{s-p} w_{s-p} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

per opportuni scalari λ_i; ma $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{s-p}\}$ è un insieme libero, quindi tutti i γ_k sono nulli. Basta dunque provare che da

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{r-p} u_{r-p} = 0_V$$

segue che tutti i coefficienti α_i e β_j sono nulli; ma ciò è vero in quanto $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{r-p})$ è una base di U.
Pertanto I è un insieme libero. $\square$

5.6. Corollario. *Siano W_1, W_2 sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, la cui somma sia diretta. Allora*

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Inoltre, se $\mathcal{B}_1 = (w'_1, \ldots, w'_s)$ e $\mathcal{B}_2 = (w''_1, \ldots, w''_r)$ sono due basi di W_1 e W_2, rispettivamente, allora $\mathcal{B} = (w'_1, \ldots, w'_s, w''_1, \ldots, w''_r)$ è una base di $W_1 \oplus W_2$.

Dimostrazione. Per il teorema di Grassmann

$$\dim(W_1 \oplus W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2);$$

ma per la Definizione 2.8, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, da cui la prima parte della tesi.
Inoltre, date le basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, si consideri $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$; chiaramente $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori di $W_1 \oplus W_2$. Da cui la seconda parte della tesi, tenendo conto di 5.4. $\square$

Più in generale:

5.7. Proposizione. *Siano $W_1, \ldots, W_n$ sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, la cui somma sia diretta. Allora*

$$\dim(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_n).$$

$\square$