Capitolo II
VETTORI GEOMETRICI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

1. Vettori applicati

Il lettore avrà certamente familiarità col concetto di vettore, usato nei corsi di fisica per individuare alcune grandezze (velocità, accelerazione, forza, ecc.).

Si ricordi che con il termine "vettore" o, più precisamente "vettore applicato", si indica un oggetto che è completamente individuato da una *direzione*, un *verso*, una *lunghezza* (o *modulo*) e un *punto di applicazione*. Per fissare le notazioni, un vettore applicato verrà denotato con $B - A$, ove A e B sono due punti dello spazio (a volte anche con il simbolo AB); in tal caso la sua direzione è quella della retta per A e B, il suo verso è quello da A a B, il suo modulo, denotato usualmente con $\| B - A \|$ è la lunghezza del segmento AB (rispetto ad una fissata unità di misura), e A è il suo punto di applicazione.

Indichiamo con $\mathcal{W}^3$ (rispettivamente $\mathcal{W}^2$) l'insieme di tutti i vettori applicati nello spazio (rispettivamente nel piano), cioè, indicato con $\mathcal{S}$ lo spazio ordinario, si ha:

$$\mathcal{W}^3 = \{B - A \mid A, B \in \mathcal{S}\}.$$

Si può considerare il sottoinsieme $\mathcal{V}_A^3$ di $\mathcal{W}^3$ costituito da tutti i vettori aventi lo stesso punto di applicazione A:

$$\mathcal{V}_A^3 = \{B - A \mid B \in \mathcal{S}\}.$$

Si osservi che

$$\mathcal{W}^3 = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} \mathcal{V}_A^3.$$

1.1. Osservazione. Fissato un punto O dello spazio, è evidente che $\mathcal{V}_O^3 = \{B - O \mid B \in \mathcal{S}\}$ è naturalmente in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{S}$, in quanto, ad ogni vettore $B - O \in \mathcal{V}_O^3$ resta associato l'estremo B, e viceversa.

È noto che in $\mathcal{V}_O^3$ è definita una *somma di vettori*, mediante la "regola del parallelogramma". Più precisamente,

$$(A - O) + (B - O) = (C - O),$$

ove C è il quarto vertice del parallelogramma i cui altri tre vertici sono A, O, B.

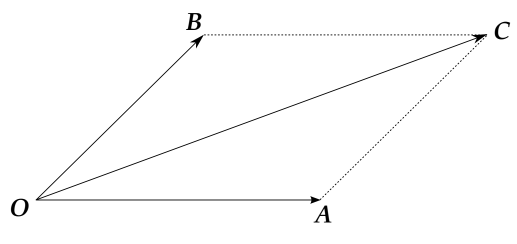

Figura 2

Il vettore $O - O$ si dice *vettore nullo* e si denoterà con $\mathbf{0}$ (osserviamo che $\mathbf{0}$ ha direzione e verso indeterminati e modulo nullo).

È evidente che $\mathcal{V}_O^3$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; inoltre si ha la seguente:

1.2. Proposizione. $(\mathcal{V}_O^3, +, \mathbf{0})$ *è un gruppo abeliano.*

Dimostrazione. È chiaro che $\mathbf{0}$ è elemento neutro; per ogni vettore $A - O$, esiste il suo opposto $A' - O$, dove A' è il punto simmetrico di A rispetto ad O.

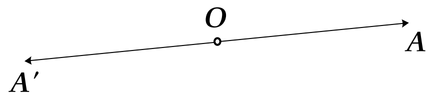

Figura 3

La proprietà commutativa segue direttamente dalla definizione di somma di vettori. Resta da verificare la proprietà associativa di cui diamo una dimostrazione grafica.

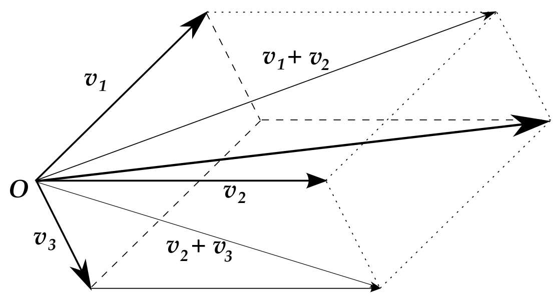

Figura 4

□

Dalla fisica è ben noto che si possono considerare i multipli di vettori (ad esempio considerando un oggetto che si muove a velocità doppia di un altro, ecc.).

Questo fatto si può interpretare nel gruppo $\mathcal{V}_O^3$ definendo una seconda operazione che coinvolge gli elementi di $\mathcal{V}_O^3$ e i numeri reali, che, in questo contesto, per differenziarli dai vettori, vengono anche chiamati *scalari* (reali).

1.3. Definizione. Si dice *prodotto di uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per un vettore* $A - O$ il vettore

$$B - O = \lambda(A - O),$$

tale che :

i) B, A, O sono allineati;

ii) $B - O$ e $A - O$ hanno lo stesso verso (e si dicono concordi) se $\lambda > 0$,

$B - O$ e $A - O$ hanno verso opposto (e si dicono discordi) se $\lambda < 0$;

iii) $\| B - O \| = |\lambda| \, \| A - O \|$.

Esaminiamo le proprietà di tale operazione.

1.4. Proposizione. *Comunque scelti* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $A - O, B - O \in \mathcal{V}_O^3$, *valgono i seguenti fatti:*

1) $\lambda(\mu(A - O)) = (\lambda\mu)(A - O)$;

2) $1(A - O) = A - O$;

3) $(\lambda + \mu)(A - O) = \lambda(A - O) + \mu(A - O)$;

4) $\lambda((A - O) + (B - O)) = \lambda(A - O) + \lambda(B - O)$.

Dimostrazione. 1) Poniamo $C - O = \lambda(\mu(A - O))$ e $D - O = (\lambda\mu)(A - O)$. Dalla definizione, C e D appartengono entrambi alla retta per O e A, dunque $C - O$ e $D - O$ hanno la stessa direzione. Inoltre dall'esame dei segni di λ e μ , si verifica facilmente che $C - O$ e $D - O$ sono concordi: ad esempio, se $\lambda > 0$ e $\mu < 0$, segue che $C - O$ è concorde con $\mu(A - O)$, quindi è discorde con $A - O$; d'altra parte $\lambda\mu < 0$, dunque $D - O$ è anch'esso discorde con $A - O$.
Infine $\| C - O \| = |\lambda|\ |\mu|\ \| A - O \| = |\lambda\mu|\ \| A - O \| = \| D - O \|$.
La proprietà 2) segue direttamente dalla definizione.
4) Poniamo $C - O = (A - O) + (B - O)$ e $C' - O = (A' - O) + (B' - O)$, ove $A' - O = \lambda(A - O)$ e $B' - O = \lambda(B - O)$. Vogliamo verificare che $\lambda(C - O) = C' - O$.

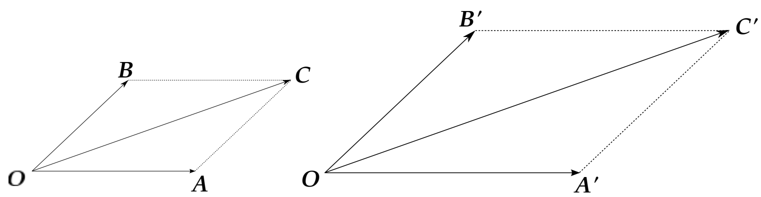

Figura 5

Poiché OA è parallelo a OA' per definizione, anche BC è parallelo a $B'C'$; inoltre OB è parallelo a OB', dunque gli angoli OBC e $OB'C'$ sono uguali. Inoltre $\lambda = OB'/OB = OA'/OA = B'C'/BC$. Quindi i triangoli OBC e $OB'C'$ sono simili. Da cui i vettori OC e OC' sono paralleli e concordi e $|OC'| = \lambda|OC|$. Quindi $OC' = \lambda(OC)$.
3) Si dimostra in modo analogo alla 4). □

Quanto precede mette in evidenza che $\mathcal{V}_O^3$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, ha una struttura più ricca di quella di gruppo abeliano. Tale struttura prende il nome "naturale" di *spazio vettoriale*, nozione che verrà trattata in dettaglio nel Capitolo III.

2. Sistemi di riferimento

È ben noto il concetto di sistema di riferimento; riprendiamo brevemente i punti fondamentali, utilizzando il linguaggio vettoriale.

2.1. Definizione. Data una retta r, un *sistema di riferimento* Λ su r è il dato di un punto $O \in r$ e di un vettore $\mathbf{i} = A - O$, con $A \in r$ e $A \neq O$. Il punto O si dice *origine* del sistema di riferimento, la lunghezza del segmento $A - O$ è l'*unità di misura* di Λ e il verso di $\mathbf{i}$ si dice *orientamento* di Λ.

Attraverso Λ si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e i numeri reali; più precisamente, ad ogni punto $P \in r$ si associa il numero reale x tale che $P - O = x\mathbf{i}$. Viceversa, dato $x \in \mathbb{R}$, rimane individuato il punto P di r che è estremo del vettore $x\mathbf{i}$.
Il numero x si dice *ascissa* del punto P e si scrive $P = (x)$. Il sistema di riferimento Λ si denoterà anche con $(O; x)$ oppure con $(O; \mathbf{i})$.

2.2. Definizione. Dato un piano α, un *sistema di riferimento* Π su α è il dato di un punto $O \in \alpha$ e di due vettori non nulli $\mathbf{i} = A - O$ e $\mathbf{j} = B - O$, con A, $B \in \alpha$, $\| A - O \| = \| B - O \|$ e tali che $\mathbf{i}$ si sovrappone a $\mathbf{j}$ ruotando di un angolo ϕ in senso antiorario, con $0 < \phi < \pi$.
Il punto O si dice *origine* del sistema di riferimento, la lunghezza del segmenti $A - O$ e $B - O$ è l'*unità di misura* di Π. La retta orientata passante per O e avente stessa direzione e stesso verso di $\mathbf{i}$ si dice *asse* x o asse delle ascisse. Analogamente, si definisce l'*asse* y o asse delle ordinate come la retta orientata individuata da $\mathbf{j}$.

Analogamente a quanto visto in precedenza, attraverso Π si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di α e le coppie di numeri reali; più precisamente, ad ogni punto $P \in \alpha$ si associa la coppia ordinata (x, y) tale che $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (regola del parallelogramma). Viceversa, dato $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, rimane individuato il punto P di α che è estremo del vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

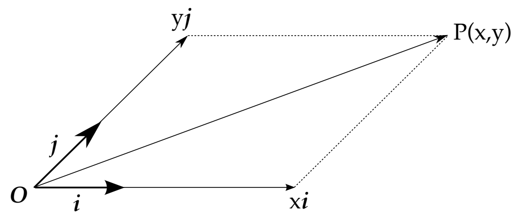

Figura 6

I numeri x e y si dicono *coordinate* di P e, più precisamente x si dice *ascissa* e y si dice *ordinata* del punto P; scriveremo $P = (x, y)$. I vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si dicono *versori fondamentali*, dove la parola *versore* indica un vettore di modulo 1.
Il sistema di riferimento Π si denoterà anche con $(O; x, y)$ oppure con $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

2.3. Definizione. Un sistema di riferimento $\Pi = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ su un piano α si dice *sistema di riferimento cartesiano ortogonale* se l'angolo tra $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ (percorso $\mathbf{i}$ per sovrapporsi a $\mathbf{j}$ ruotando in senso antiorario) è di $\pi/2$.

Per definire un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, introduciamo la seguente nozione.

2.4. Definizione. Una terna ordinata di vettori applicati non complanari $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_O^3$ si dice *destrorsa* se, guardando il piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (risp. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, risp. $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$) dalla parte di $\mathbf{w}$ (risp. $\mathbf{u}$, risp. $\mathbf{v}$), $\mathbf{u}$ si sovrappone a $\mathbf{v}$ (risp. $\mathbf{v}$ si sovrappone a $\mathbf{w}$, risp. $\mathbf{w}$ si sovrappone a $\mathbf{u}$) ruotando in senso antiorario di un angolo minore di π.

2.5. Definizione. Dato lo spazio $\mathcal{S}$, un *sistema di riferimento cartesiano* Σ su $\mathcal{S}$ è il dato di un punto $O \in \mathcal{S}$ e di tre vettori non nulli $\mathbf{i} = A - O$, $\mathbf{j} = B - O$ e $\mathbf{k} = C - O$ con $A, B, C \in \mathcal{S}$, $\| A - O \| = \| B - O \| = \| C - O \|$ e tali che $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formano una terna destrorsa.
Il punto O si dice *origine* del sistema di riferimento, la lunghezza del segmenti $A - O$, OB e OC è l'*unità di misura* di Σ. La retta orientata passante per O e avente stessa direzione e stesso verso di $\mathbf{i}$ si dice *asse* x o asse delle ascisse. Analogamente, si definiscono l'*asse* y o asse delle ordinate e l'*asse* z o asse delle quote. In particolare useremo la notazione $P = (x, y, z)$, chiamando, rispettivamente, tali coordinate: *ascissa*, *ordinata* e *quota* del punto P.
Porremo, infine, $\Sigma = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (O; x, y, z)$. I vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono *versori fondamentali.*
Infine il sistema Σ si dice *cartesiano ortogonale* se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono a due a due ortogonali.

Come visto in precedenza, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathcal{S}$ e le terne di numeri reali, attraverso $\mathcal{V}_O^3$; più precisamente:

$$\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{V}_O^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3,$$

e tali corrispondenze sono definite da

$$P \leftrightarrow P - O \leftrightarrow (x, y, z)$$

dove $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, come nella figura sottostante.

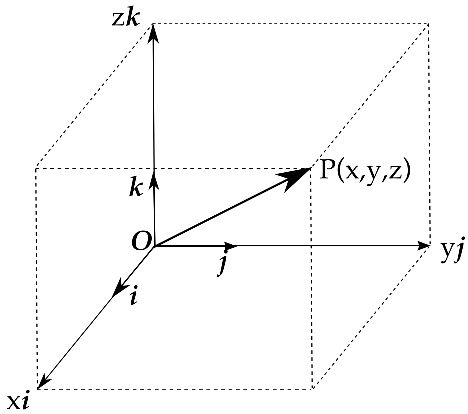

Figura 7

2.6. Definizione. Con le notazioni precedenti, se $P = (x, y, z)$, quindi $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, i numeri reali x, y, z si dicono *componenti* del vettore applicato $P - O$.

Notazione. In generale, useremo anche la notazione $\mathbf{v}$ per un vettore, $\mathbf{v} = P - O$, e avremo quindi $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Spesso è conveniente indicare le componenti di $\mathbf{v}$ con v_x, v_y, v_z, quindi

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}.$$

In seguito, per semplificare la notazione, scriveremo

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z),$$

sottointendendo che tali componenti sono riferite al sistema di riferimento $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

2.7. Osservazione. Mentre un vettore $\mathbf{v}$ è un oggetto geometrico invariante, le sue componenti dipendono dal particolare sistema di riferimento fissato.

2.7.1. Esempi. 1) Il vettore nullo $\mathbf{0} = O - O$ ha componenti $(0, 0, 0)$ in tutti i sistemi di riferimento di origine O ed è l'unico vettore che gode di tale proprietà.
2) I versori fondamentali hanno le seguenti componenti:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\ , \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\ , \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

nel sistema di riferimento $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
3) I vettori dei *piani coordinati* (cioè i piani individuati da una coppia di assi) sono del tipo seguente: $\mathbf{v} = (a, b, 0)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se $\mathbf{v}$ appartiene al piano xy, $\mathbf{v}' = (0, b', c')$, se $\mathbf{v}'$ appartiene al piano yz, $\mathbf{v}'' = (a'', 0, c'')$, se $\mathbf{v}''$ appartiene al piano xz.

2.8. Proposizione. *In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale* $(O; x, y, z)$ *si consideri un generico vettore* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. *Allora*

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Segue immediatamente usando il teorema di Pitagora. $\square$

Vediamo ora come la rappresentazione dei vettori attraverso le loro componenti ci permetta di esprimere algebricamente le operazioni tra vettori.

2.9. Proposizione. *Dati lo scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e i vettori* $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}$, *si ha:*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x)\mathbf{i} + (v_y + w_y)\mathbf{j} + (v_z + w_z)\mathbf{k}$$

e anche

$$\lambda\mathbf{v} = \lambda v_x\mathbf{i} + \lambda v_y\mathbf{j} + \lambda v_z\mathbf{k}.$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{v}+\mathbf{w} = (v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k})+(w_x\mathbf{i}+w_y\mathbf{j}+w_z\mathbf{k})$, applicando opportunamente le proprietà commutativa e associativa della somma si ha:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x\mathbf{i} + w_x\mathbf{i}) + (v_y\mathbf{j} + w_y\mathbf{j}) + (v_z\mathbf{k} + w_z\mathbf{k}).$$

Applicando infine la distributività del prodotto rispetto alla somma si ha il risultato.
In modo analogo si dimostra la seconda. □

2.10. Osservazione. Usando la notazione compatta $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$, dalla proposizione precedente segue

$$(v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

$$\lambda(v_x, v_y, v_z) = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z).$$

Dall'osservazione precedente e dalla corrispondenza biunivoca $\mathcal{V}^3_O \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$ si definiscono in modo naturale le seguenti operazioni in $\mathbb{R}^3$:

2.11. Definizione. Siano (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) due elementi di $\mathbb{R}^3$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$; allora

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3);$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Queste operazioni verranno studiate più in dettaglio nel Capitolo III, 1.3.

3. Ulteriori operazioni tra vettori

Nello studio della fisica, il lettore avrà già incontrato i concetti di prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto misto di vettori. In questo paragrafo riprendiamo brevemente tali operazioni.

3.1. Definizione. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3$ due vettori. Si dice *prodotto scalare* di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e si indica con $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ il numero reale

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos\alpha$$

dove $\alpha = \widehat{\mathbf{vw}}$, $0 \le \alpha \le \pi$, è l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(Si tenga conto che la trattazione del prodotto scalare in $\mathcal{V}^2_O$ è del tutto analoga.)

3.2. Osservazione. Dalla definizione si ha chiaramente che, se $\mathbf{v}$ è il vettore nullo, allora $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.
Inoltre si hanno immediatamente le ulteriori proprietà:
i) se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori non nulli, allora

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{w}.$$

ii) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_O^3$ si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{v} \|^2 .$$

In particolare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = 0.$$

Infine, da *i*) e *ii*) segue se $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, allora:

iii) $$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{e inoltre} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

3.3. Proposizione. *Dati i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_O^3$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si hanno i seguenti fatti:*

i) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;

ii) $(\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;

iii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

<u>Dimostrazione</u>. *i*) Segue dalla definizione e dalla proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$; infatti

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \| \mathbf{w} \| \, \| \mathbf{v} \| \cos \widehat{\mathbf{w}\mathbf{v}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}.$$

ii) Posti: $a = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$, $\quad b = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w})$, $\quad c = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$, dalla definizione di prodotto scalare e dalle proprietà del modulo di un vettore si hanno:

$$\begin{aligned}
a &= (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \| \lambda \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \alpha' = |\lambda| \, \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \alpha' \\
b &= \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \| \mathbf{v} \| \, \| \lambda \mathbf{w} \| \cos \alpha'' = \| \mathbf{v} \| \; |\lambda| \, \| \mathbf{w} \| \cos \alpha'' \\
c &= \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \lambda(\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \alpha) = \lambda \, \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \alpha
\end{aligned}$$

dove $\alpha' = \widehat{(\lambda \mathbf{v})\mathbf{w}}$, $\alpha'' = \widehat{\mathbf{v}(\lambda \mathbf{w})}$ e $\alpha = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$.
Si noti che, se $\lambda = 0$, $a = b = c = 0$. Mentre se $\lambda > 0$, allora $|\lambda| = \lambda$ e $\alpha = \alpha' = \alpha''$; dunque, dalle proprietà commutativa e associativa del prodotto in $\mathbb{R}$, si ottiene $a = b = c$.
Infine, $\lambda < 0$, allora $|\lambda| = -\lambda$ e $\alpha' = \alpha'' = \pi - \alpha$ e quindi $\cos \alpha' = \cos \alpha'' = -\cos \alpha$. Pertanto, dalla commutatività e associatività del prodotto in $\mathbb{R}$, si ottiene $a = b = c$.
iii) Diamo un idea del caso generale supponendo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano paralleli. Si possono presentare vari casi, a seconda dei versi dei tre vettori. Ad esempio, se sono tutti concordi, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} + \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \| \, (\| \mathbf{v} \| + \| \mathbf{w} \|) = \\
&= \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \| + \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{w} \| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Se invece $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono concordi, ma discordi da $\mathbf{u}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= - \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} + \mathbf{w} \| = - \| \mathbf{u} \| \, (\| \mathbf{v} \| + \| \mathbf{w} \|) = \\
&= - \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \| - \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{w} \| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Gli altri casi sono lasciati al lettore. □

Usando la rappresentazione di un vettore attraverso le sue componenti rispetto alla terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si ha la seguente facile formulazione del prodotto scalare che – si noti bene – vale solo in un sistema di riferimento *ortogonale*.

3.4. Proposizione. *Nello spazio con sistema di riferimento cartesiano ortogonale* $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *si considerino due vettori* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *e* $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$*. Allora*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

<u>Dimostrazione</u>. Poiché $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}$, per 3.3, *ii*) e *iii*), si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) \cdot (w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}) = \\ &= v_x w_x \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + v_y w_x \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + v_z w_x \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + v_x w_y \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + v_y w_y \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + v_z w_y \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} \\ &\quad + v_x w_z \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + v_y w_z \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + v_z w_z \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\end{aligned}$$

Per 3.2, *iii*) si ha che $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \cdots = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, mentre $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$. Sostituendo nell'espressione precedente, si ha la tesi. □

3.4.1. Esempio. Vogliamo verificare che i vettori $\mathbf{v} = (2, 3, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$ sono ortogonali. Per 3.2 *i*) basta provare che $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$. D'altra parte, per 3.4 si ha: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$.

La seguente nozione, legata a quella di prodotto scalare, tornerà utile negli spazi euclidei.

3.5. Definizione. Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non nulli, si dice *proiezione ortogonale* di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v_w}$ (parallelo a $\mathbf{w}$) definito da

$$\mathbf{v_w} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\| \mathbf{w} \|^2}\mathbf{w}$$

e illustrato dalla seguente figura:

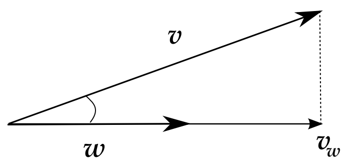

Figura 8

Con le proprietà del prodotto scalare viste nella Proposizione 3.3. si ha direttamente il seguente risultato:

3.6. Lemma. *Comunque scelti i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3_O$*, valgono i seguenti fatti:*

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_\mathbf{w} = \mathbf{u_w} + \mathbf{v_w}$.

b) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v_w}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w_v}\cdot\mathbf{v}$. □

La seguente figura illustra il punto (*a*) del precedente lemma:

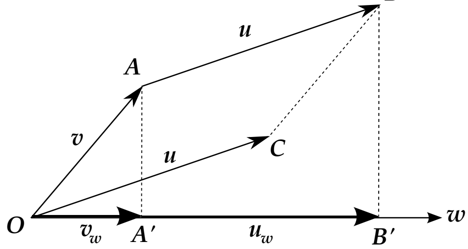

Figura 9

3.7. Osservazione. Il prodotto scalare tra vettori dello spazio è sostanzialmente un'applicazione $\sigma : \mathcal{V}_O^3 \times \mathcal{V}_O^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
Analogamente il prodotto scalare tra vettori del piano individua un'applicazione $\sigma : \mathcal{V}_O^2 \times \mathcal{V}_O^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

3.8. Definizione. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3$ due vettori. Si dice *prodotto vettoriale* di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e si indica con $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ il vettore il cui modulo vale

$$\| \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \| = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin \alpha$$

dove $\alpha = \widehat{\mathbf{vw}}$, $0 \le \alpha \le \pi$, è l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$; la sua direzione è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$ e il suo verso è tale che $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è una terna destrorsa.

3.9. Osservazione. Dalla definizione si ha chiaramente che, se $\mathbf{v}$ è il vettore nullo, allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$.
Inoltre si hanno immediatamente le ulteriori proprietà:
i) se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori non nulli, allora

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin \alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{w}.$$

In particolare $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$.
ii) Se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è la terna fondamentale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale allora:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}, \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}.$$

Omettiamo la dimostrazione delle seguenti proprietà (le prime due sono facili verifiche).

3.10. Proposizione. *Dati i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_O^3$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si hanno i seguenti fatti:*

i) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;

ii) $(\lambda \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;

iii) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$. □

3.11. Proposizione. *Siano* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *e* $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ *due vettori di* $\mathcal{V}_O^3$. *Allora*

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x).$$

<u>Dimostrazione</u>. Del tutto analoga a quella di 3.4, tenendo conto di 3.10 e di 3.9 *ii*). □

3.11.1. Esempio. Vogliamo verificare che i vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 0, 2)$ sono paralleli. Per 3.9 *i*) basta verificare che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$. D'altra parte, per l'espressione 3.11 si ha:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (0, 0, 0).$$

3.12. Osservazione. Il prodotto vettoriale tra vettori dello spazio è un'applicazione tra insiemi $\tau : \mathcal{V}_O^3 \times \mathcal{V}_O^3 \longrightarrow \mathcal{V}_O^3$ definita da $\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.
Contrariamente al prodotto scalare, non ha senso definire il prodotto vettoriale tra vettori del piano in quanto il risultato non sarebbe nel piano.

3.13. Definizione. Dati i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_O^3$, si definisce *prodotto misto* di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

3.14. Proposizione. *Siano* $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *e* $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ *tre vettori di* $\mathcal{V}^3_O$*; allora*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(v_z w_x - v_x w_z) + u_z(v_x w_y - v_y w_x).$$

<u>Dimostrazione</u>. Segue immediatamente da 3.4 e 3.11. □

C'è una interpretazione del prodotto vettoriale e del prodotto misto, rispettivamente, come area di un parallelogramma e volume di un parallelepipedo.

3.15. Proposizione. *Dati i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3_O$*,*

1) posto $\alpha = \widehat{\mathbf{vw}}$ *l'angolo formato da* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *e posta* A *l'area del parallelogramma che ha tali vettori come lati, si ha:*

$$A = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin\alpha = \| \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \| \, .$$

2) Posto $\theta = \widehat{\mathbf{u}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})}$ *l'angolo formato dai vettori* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *e posto* V *il volume del parallelepipedo che ha come spigoli* $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$*, si ha:*

$$V = A \, \| \mathbf{u} \| \cos\theta = \| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \| \, .$$

<u>Dimostrazione</u>. I due risultati sono evidenti dalle due figure seguenti. □