Capitolo XII
CONICHE

1. Coniche come luoghi geometrici

Le coniche, che si dividono in Parabole, Ellissi (con il caso limite di Circonferenze), e Iperboli, sono note fino dai tempi più remoti come *luoghi geometrici*, cioè come insiemi di punti caratterizzati da proprietà geometriche. Il lettore avrà sicuramente incontrato il tipo di relazioni seguenti:

$$x^2 = 2py, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{$\star$}$$

la cui derivazione richiamiamo brevemente.

a) Fissata una retta δ e un punto F del piano, il luogo dei punti equidistanti da δ e da F si dice *parabola.* La retta δ si dice *direttrice* e il punto F si dice *fuoco* della parabola.

Siano, ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y)$:

$$\delta : \ y = -p/2, \quad F = (0, p/2).$$

Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano. Con d che denota la distanza, il luogo geometrico in questione è caratterizzato dalla proprietà

$$d(P, \delta) = d(P, F). \tag{1}$$

Poiché la proiezione ortogonale di P su δ è il punto $P' = (x, -p/2)$ e $d(P, \delta) = d(P, P')$, la condizione (1) diventa:

$$\| P - P' \|^2 = \| P - F \|^2 \quad \text{cioè} \quad \| (0, y + p/2) \|^2 = \| (x, y - p/2) \|^2$$

quindi

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 = 2py.$$

b) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *ellisse.* I punti F_1 ed F_2 si dicono *fuochi* dell'ellisse.

Siano $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e sia k un numero reale positivo tale che $k > 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k. \tag{2}$$

Per semplificare i conti, consideriamo le intersezioni di tale luogo geometrico con i semiassi positivi, cioè due punti del tipo $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, con $a > 0, b > 0$. Dal fatto che $d(A, F_1) + d(A, F_2) = k$, segue $k = 2a$; inoltre dalla relazione $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$ segue che $2\sqrt{q^2 + b^2} = k$. Quindi si hanno le utili uguaglianze:

$$k = 2a, \quad q^2 = a^2 - b^2.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (2), si ottiene:

$$\| (x + q, y) \|^2 + \| (x - q, y) \|^2 + 2 \ \| (x + q, y) \| \ \| (x - q, y) \| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2+y^2+q^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+q^2+2qx)(x^2+y^2+q^2-2qx)}=4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2+y^2+q^2)^2-4q^2x^2}=2a^2-(x^2+y^2+q^2).$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2=a^4-a^2(x^2+y^2+q^2)$$

e quindi, operando la sostituzione descritta all'inizio $q^2=a^2-b^2$, si ottiene l'equazione del luogo geometrico in questione in funzione dei due parametri a e b:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se $q=0$, cioè se $a=b$, allora i fuochi F_1 ed F_2 coincidono nell'origine, l'ellisse si dice *circonferenza* e la sua equazione assume la forma

$$x^2+y^2=r^2$$

dove $r=a=b$ ed è detto *raggio* della circonferenza.

c) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *iperbole*. I punti F_1 ed F_2 si dicono *fuochi* dell'iperbole.

Fissiamo i punti $F_1=(-q,0)$, $F_2=(q,0)$ (con $q\geq 0$) e un numero reale positivo $k>2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P=(x,y)$ tali che

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=k. \tag{3}$$

Si osservi che, contrariamente al caso precedente, tale luogo geometrico non interseca l'asse y, in quanto ogni suo punto P è equidistante da F_1 e F_2, mentre $k\neq 0$. Si consideri, invece, l'intersezione $A=(a,0)$ $(a>0)$ di tale luogo geometrico con il semiasse positivo delle x. Dal fatto che

$$k=|d(A,F_1)-d(A,F_2)|=|a+q-|a-q||,$$

segue che $a<q$; altrimenti $|a-q|=a-q$, da cui seguirebbe $k=2q$. Quindi la condizione precedente implica

$$k=|2a|=2a.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (3), si ottiene:

$$\|\,(x+q,y)\,\|^2+\|\,(x-q,y)\,\|^2-2\;\|\,(x+q,y)\,\|\;\|\,(x-q,y)\,\|=4a^2$$

cioè

$$2(x^2+y^2+q^2)-2\sqrt{(x^2+y^2+q^2+2qx)(x^2+y^2+q^2-2qx)}=4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2+y^2+q^2)^2-4q^2x^2}=(x^2+y^2+q^2)-2a^2.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi

$$(a^2 - q^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - q^2).$$

Poiché $a < q$, la quantità $q^2 - a^2$ è sicuramente positiva; si ponga dunque, in analogia con quanto visto nel caso *b*), $q^2 - a^2 = b^2$; pertanto l'equazione del luogo geometrico in questione diventa:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per $-a^2b^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1.1. Osservazione. Da quanto visto in precedenza, segue che, se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py,$$

allora la sua direttrice ha equazione $y = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(0, p/2)$.
Con procedimento del tutto analogo, se C è una parabola di equazione

$$y^2 = 2px$$

allora la sua direttrice ha equazione $x = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(p/2, 0)$.
Se C è una ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(con $a > b$) allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.
Se C è un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(con $a > b$) allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Ricordiamo ulteriori definizioni di base.

1.2. Definizione.

i) Sia C una parabola di fuoco F e di direttrice δ;
   - la retta ortogonale a δ e passante per F si dice *asse* di C;
   - il punto di intersezione dell'asse con la parabola si dice *vertice*.

ii) Sia C un'ellisse di fuochi (distinti) F_1 e F_2;
   - la retta per i fuochi si dice *asse maggiore*;
   - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse minore*;

- il punto di intersezione dell'asse maggiore e dell'asse minore (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C;
- i quattro punti di intersezione di C con gli assi si dicono *vertici*;
- la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici che appartengono all'asse maggiore si dice *semiasse maggiore* (analogamente si definisce il *semiasse minore*).

iii) Sia C un'iperbole di fuochi (distinti) F_1 e F_2;

- la retta per i fuochi si dice *asse trasverso*;
- la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse non trasverso*;
- il punto di intersezione dell'asse trasverso e dell'asse non trasverso (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C;
- i due punti di intersezione di C con l'asse trasverso si dicono *vertici*;
- la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici si dice *semiasse trasverso*.

Facendo riferimento alla nozione di simmetria vista nel Cap. XI (in particolare alle definizioni 5.1 e 5.3), osserviamo che l'asse y è asse di simmetria per la parabola C di equazione $y = x^2$; infatti, se $P = (x_0, y_0) \in C$ allora vale $y_0 = x_0^2$. Il punto simmetrico di P rispetto all'asse y è $P' = (-x_0, y_0)$, che appartiene ancora a C in quanto $y_0 = (-x_0^2) = x_0^2$. Analogamente si prova che l'origine è centro di simmetria dell'ellisse $2x^2 + 3y^2 = 1$. In generale, valgono le analoghe proprietà, che si provano con l'uso della seguente

1.3. Osservazione. È chiaro che nello studiare simmetrie o, in generale, proprietà geometriche delle coniche ci si può riferire a coniche espresse con una equazione di tipo $(\star)$, in quanto le caratteristiche geometriche sono indipendenti dal sistema di riferimento.

È immediata pertanto la seguente

1.4. Proposizione.

i) Se C è una parabola, il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, i suoi assi sono assi di simmetria ed il suo centro è centro di simmetria.

2. Equazione di una conica e sua forma matriciale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, in un opportuno sistema di riferimento, una parabola, un'ellisse e un'iperbole hanno una equazione del tipo di quelle in ($\star$).

È evidente che tali equazioni non sono le più generali possibili. Infatti i luoghi geometrici che esse descrivono sono in una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani (che, ad esempio, nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, sono i loro assi di simmetria). Ciò che accomuna le tre equazioni in ($\star$) è il fatto che sono tutte associate a polinomi di secondo grado nelle variabili x e y. Lo scopo di questo paragrafo è quello di studiare equazioni polinomiali di questo tipo, nella forma più generale.

Inizialmente, l'ambiente in cui lavoreremo sarà il piano affine euclideo $\mathbb{E}^2$, cioè il piano affine associato al piano euclideo reale E^2. Nella maggior parte del nostro studio, non utilizzerermo però la struttura euclidea data dal prodotto scalare, quindi in realtà opereremo semplicemente nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$; successivamente avremo bisogno anche di coordinate complesse, quindi "amplieremo" il nostro ambiente al piano affine complesso $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$: è intuitivamente chiaro che dall'inclusione canonica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$, segue l'inclusione dei piani affini

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C}).$$

2.1. Definizione. Si dice *conica* il luogo dei punti di $\mathbb{E}^2$ aventi coordinate (x, y) che soddisfano una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti reali in due variabili, cioè del tipo:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0 \tag{4}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La denominazione dei coefficienti (con due indici) come pure il fattore 2 nei coefficienti di alcuni monomi sono dovuti a motivi pratici, chiariti in seguito.

2.2. Osservazione.

a) Le coniche del paragrafo precedente sono casi particolari della equazione generale (4); ad esempio l'equazione per una parabola si ottiene per

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} = -2p, \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0.$$

Si osservi che in tutte le equazioni per una parabola, un'ellisse o un'iperbole studiate nel paragrafo precedente, il coefficiente a_{12} del monomio xy è nullo.

b) Non ogni equazione del tipo (4) descrive uno dei luoghi geometrici precedentemente definiti (cioè è una parabola, un'ellisse o un'iperbole). Infatti, ad esempio, il polinomio $x^2 - y^2$ si fattorizza nel prodotto $(x+y)(x-y)$ e quindi la conica di equazione $x^2 - y^2 = 0$ risulta essere l'unione delle due rette di equazione $x + y = 0$ e $x - y = 0$.
Più in generale, ogni equazione di secondo grado del tipo

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

rappresenta l'unione di due rette. Tali rette non sempre sono reali. Ad esempio si consideri l'equazione $x^2 + y^2 = 0$. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale equazione ha la sola soluzione $(0, 0)$, mentre in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, poiché $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, corrisponde all'unione delle due rette complesse e coniugate $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.

2.3. Definizione. Una conica si dice *degenere* se è unione di due rette (che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate).

Nel seguito utilizzeremo ampiamente una scrittura più sintetica della equazione (4) in termini di matrici. Si osservi infatti che, denotando con B la matrice simmetrica di $\mathbb{R}^{3,3}$ definita da

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33}.$$

Quindi l'equazione (4) di una conica C diventa:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Si osservi che la parte omogenea di secondo grado del polinomio che definisce la conica C, cioè

$$F_C(x, y) := a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2$$

è esprimibile anch'essa in termini di una matrice simmetrica:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cioè, posta

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si può scrivere:

$$F_C(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tale F_C è un esempio di forma quadratica, detta *forma quadratica* della conica C.

2.4. Definizione. Sia C una conica di equazione

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0.$$

Le matrici

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, *matrice dei coefficienti* e *matrice della forma quadratica* di C.

2.4.1. Esempio. Le matrici associate alla parabola $y = 3x^2$ sono:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. Osservazione. Si noti che i 6 coefficienti a_{ij} che compaiono in (4) individuano una conica, ma non viceversa; infatti per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'equazione

$$ka_{11}\,x^2 + 2\,ka_{12}\,xy + ka_{22}\,y^2 + 2\,ka_{13}\,x + 2\,ka_{23}\,y + ka_{33} = 0$$

definisce lo stesso luogo di punti del piano, cioè la stessa conica. Pertanto ogni conica è individuata da ∞^1 equazioni o, più precisamente, da ∞^1 sestuple di coefficienti, tutte tra loro proporzionali.

3. Forma canonica di una conica: traslazioni

Una domanda naturale che ci si pone è la seguente: Data una conica non degenere in forma generale esiste un sistema di riferimento del piano affine in cui tale conica assume una forma particolarmente semplice, cioè una forma "simile" a quelle di $(\star)$?

3.1. Definizione. Si dice *forma canonica* di una conica non degenere C una sua equazione in un sistema di riferimento $(O; x, y)$ che è di una delle seguenti forme:

$$i)\quad x^2 = 2py \qquad\qquad ii)\quad y^2 = 2px \tag{P}$$

una tale conica viene detta *parabola*;

$$i)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad ii)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{E}$$

una tale conica viene detta *ellisse reale*, nel caso $E.i)$; *ellisse immaginaria* nel caso $E.ii)$;

$$i)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad ii)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{I}$$

una tale conica viene detta *iperbole.*

Risponderemo alla domanda iniziale in due passi successivi: dapprima ci limiteremo a coniche nella cui equazione non appare il monomio xy, cioè tali $a_{12} = 0$; vedremo che il sistema di riferimento cercato è ottenibile mediante traslazione.

In seguito vedremo che, data una conica in forma generale, il riferimento in cui si annulla il coefficiente del monomio xy si otterrà mediante una rotazione. La procedura completa per ottenere una forma canonica di una conica risulterà essere, quindi, la composizione di una rotazione e di una traslazione del piano. Una tale operazione viene quindi chiamata *rototraslazione* del piano.

3.1.1. Esempio. Sia $\Gamma :\ y = 2x^2$ una parabola in forma canonica; vediamo come varia l'equazione di Γ se operiamo la traslazione del piano

$$T_{(a,b)} : \quad \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}.$$

Con una sostituzione si ottiene l'equazione di Γ in $(O'; X, Y)$:

$$Y = 2X^2 + 4aX + 2a^2 - b.$$

3.1.2. Esempio. Sia $\Gamma' :\ x^2 + 2y^2 = 1$ un'ellisse in forma canonica; con la traslazione $T_{(a,b)}$ dell'esempio precedente, l'equazione di Γ' diventa:

$$X^2 + 2Y^2 + 2aX + 4bY + a^2 + 2b^2 - 1 = 0.$$

Si osservi che attraverso la traslazione $T_{(a,b)}$ le coniche Γ e Γ' passano dalla forma canonica ad una nuova forma nella quale il coefficiente a_{12} è ancora zero. Vediamo ora il viceversa, cioè proviamo che se una conica ha una equazione priva del monomio xy, la si può ridurre a forma canonica operando una traslazione.

3.2. Metodo del completamento dei quadrati. Sia C una conica non degenere avente equazione, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$,

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0. \tag{6}$$

Si possono presentare due casi: o entrambi i coefficienti a_{11} e a_{22} sono non nulli oppure uno dei due è nullo.

I. <u>Caso $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0$</u> (il caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} = 0$ è del tutto analogo).

L'equazione (6) diventa dunque:

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{6.P}$$

Poiché

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y = a_{22}\left(y^2 + 2\,\frac{a_{23}}{a_{22}}\, y\right) = a_{22}\left[\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2\right] = a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$$

l'equazione (6.P) diventa:

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{6.P'}$$

Poiché si suppone C non degenere, allora $a_{13} \neq 0$ e quindi l'equazione (6.P') della conica si può scrivere come:

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2\, a_{13}\left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}}\right) = 0$$

da cui

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = -\frac{2\, a_{13}}{a_{22}}\left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}}\right).$$

Quindi con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \dfrac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

e ponendo $p = -a_{13}/a_{22}$, si ottiene la forma canonica:

$$Y^2 = 2\, p\, X. \tag{$P.ii$}$$

Se non richiediamo alla conica in questione di essere non degenere, dobbiamo esaminare anche il caso $a_{13} = 0$; in questo caso l'equazione $(6.P')$ diventa:

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = \frac{a_{23}^2 - a_{33}a_{22}}{a_{22}^2}$$

cioè, con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

assume la forma

$$Y^2 = q. \tag{$P.iii$}$$

II. <u>Caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0$</u>.

Come operato nel caso precedente:

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{13}\,x = a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

e, analogamente:

$$a_{22}\,y^2 + 2\,a_{23}\,y = a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}.$$

Pertanto l'equazione (6) diventa:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0. \tag{$6'$}$$

Se si opera dunque la traslazione di equazioni:

$$\begin{cases} X &= x + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

ponendo $h = -a_{33} + \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$, nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ la conica C ha equazione:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 = h. \tag{$6''$}$$

Si presentano ora due casi: o a_{11} e a_{22} sono concordi oppure sono discordi. Ovviamente, a meno di un cambio di segno dell'equazione precedente, si può supporre $a_{11} > 0$. Poiché C è non degenere, deve essere $h \neq 0$. Per completezza, esamineremo anche il caso $h = 0$.

II.a) <u>Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} > 0$</u>.

($\circ$) $h > 0$: in tal caso l'equazione $(6'')$ diventa:

$$\frac{a_{11}}{h}\,X^2 + \frac{a_{22}}{h}\,Y^2 = 1.$$

Poiché $a_{11}/h > 0$ e $a_{22}/h > 0$, poniamo $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione di C diventa

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1. \tag{$E.i$}$$

(∘) $h < 0$: in tal caso, dividendo ambo i membri per $-h$, visto che $-a_{11}/h > 0$ e $-a_{22}/h > 0$, si pone $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $-a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (6″) diventa

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1. \tag{$E.ii$}$$

(∘) $h = 0$: in tal caso, ponendo $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ si ottiene l'equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{$E.iii$}$$

$II.b$) Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} < 0$.

(∘) $h > 0$: in tal caso l'equazione (6″) diventa:

$$\frac{a_{11}}{h}\,X^2 + \frac{a_{22}}{h}\,Y^2 = 1.$$

Poiché $a_{11}/h > 0$ e $a_{22}/h < 0$, posti $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = -1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, l'equazione di C diventa

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1. \tag{$I.i$}$$

(∘) $h < 0$: in tal caso, dividendo ambo i membri per $-h$, visto che $-a_{11}/h > 0$ e $-a_{22}/h < 0$, si può porre $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (6″) diventa

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1. \tag{$I.ii$}$$

(∘) $h = 0$: in tal caso, ponendo $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = -1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ si ottiene l'equazione

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{$I.iii$}$$

Nella discussione precedente abbiamo incontrato equazioni di coniche degeneri, simili a quelle delle forme canoniche di parabola, ellisse, iperbole. E' naturale, dare la seguente

3.3. Definizione. Si dice *forma canonica* di una conica degenere una delle seguenti equazioni:

$$x^2 = q \quad \text{o} \quad y^2 = q \tag{$P.iii$}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{$E.iii$}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{$I.iii$}$$

I nomi ($P.iii$), ($E.iii$), ($I.iii$) dati nella definizione precedente si riferiscono al fatto che le corrisponenti equazioni si sono ottenute in 3.2 come casi particolari di parabole, ellissi, iperboli, rispettivamente.

3.4. Osservazione. La conica C di equazione

$$x^2 = q \quad \text{(o analogamente} \quad y^2 = q) \tag{P.iii}$$

è l'unione delle rette parallele all'asse y: $x = \pm\sqrt{q}$. Se $q > 0$, tali rette sono reali e distinte, se $q < 0$ tali rette sono complesse e coniugate; infine se $q = 0$ la conica C risulta essere l'asse y (o rispettivamente l'asse x) "contato due volte".

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{E.iii}$$

è soddisfatta da un solo punto a coordinate reali: l'origine $(0, 0)$; mentre nel piano affine complesso $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ tale conica risulta essere l'unione di due rette complesse e coniugate, in quanto si può operare la seguente fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{C}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + i\,\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\,\frac{y}{b}\right).$$

Infine l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{I.iii}$$

corrisponde all'unione di due rette reali e distinte, in quanto si può operare la seguente fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{R}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Riassumendo, il Metodo 3.2 prova dunque il seguente

3.5. Teorema. *Sia C una conica (degenere o non degenere) la cui equazione sia priva del monomio xy in un sistema di riferimento $(O; x, y)$. Allora esiste un sistema di riferimento $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante traslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.* □

3.5.1. Esempio. Sia C la conica di equazione

$$C : \quad x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0.$$

Vogliamo determinare un riferimento $(O'; X, Y)$ in cui C ammette una forma canonica e l'equazione della corrispondente traslazione.
Applicando il metodo del completamento dei quadrati, poiché

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1\,, \quad 4y^2 - 12y = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$

si ha:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = (x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 7.$$

Pertanto, operando la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione di C diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/4} = 1;$$

ovvero una ellisse di centro $(-1, 3/2)$, assi le rette $x = -1$ e $y = 3/2$ e semiassi $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/2$.

Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, sia data la parabola Γ di equazione canonica $y = x^2$. Vogliamo determinare l'equazione di Γ nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ ottenuto dal precedente mediante la seguente trasformazione di coordinate (che risulterà essere una rotazione):

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Γ, si ottiene

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \;\Rightarrow\; X^2 + 2XY + Y^2 + \sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0.$$

In questo esempio si vede che, per effetto della rotazione, nella ultima equazione della conica appare un termine in XY. E' naturale chiedersi se vale il viceversa, cioè se sia possibile, attraverso una opportuna trasformazione, passare da un'equazione che contiene il monomio XY ad una che non lo contiene.

In altri termini, vogliamo determinare un riferimento in cui la matrice della forma quadratica di una conica è diagonale. Il teorema di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche garantisce che ciò è possibile operando con una matrice ortogonale.
Preliminarmente studiamo come varia l'equazione di una conica al variare del sistema di riferimento. Facendo riferimento al cambio di base di uno spazio vettoriale studiato nel Cap. VII, Par. 4, è naturale dare la seguente definizione:

4.1. Definizione. Si dice *rotazione* del piano un cambio di sistema di riferimento da $(O; x, y)$ a $(O; \overline{x}, \overline{y})$ tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \tag{$\bullet$}$$

dove $P \in \mathbb{R}^2$ è una matrice ortogonale speciale, detta *matrice della rotazione.* Dunque se

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

tale trasformazione di coordinate si esplicita in

$$\begin{cases} x = p_{11}\overline{x} + p_{12}\overline{y} \\ y = p_{21}\overline{x} + p_{22}\overline{y} \end{cases} \tag{$*$}$$

che sono dette *equazioni della rotazione.*

Ricordiamo qualche elemento in più dal Cap. X, 1.9 sulle traslazioni. Una traslazione da un sistema di riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ a un altro $(O'; X, Y)$ ha equazioni

$$\begin{cases} \overline{x} = X + \alpha \\ \overline{y} = Y + \beta \end{cases}. \tag{7}$$

dove, ovviamente, $(-\alpha, -\beta)$ sono le coordinate del punto O nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ o, equivalentemente, (α, β) sono le coordinate del punto O' nel sistema di riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$.

4.2. Definizione. Si dice *rototraslazione* del piano un cambio di sistema di riferimento ottenuto operando successivamente una rotazione e una traslazione.

4.3. Osservazione - Definizione. Si consideri la rototraslazione data dalla composizione della rotazione da $(O; x, y)$ a $(O; \overline{x}, \overline{y})$ definita da $(*)$ seguita dalla traslazione da $(O; \overline{x}, \overline{y})$ a $(O'; X, Y)$ definita da (7). Sostituendo le espressioni $\overline{x} = X + \alpha$ e $\overline{y} = Y + \beta$, ricavate da (7), nelle equazioni $(*)$, si ottengono le *equazioni della rototraslazione*:

$$\begin{cases} x = p_{11}X + p_{12}Y + a \\ y = p_{21}X + p_{22}Y + b \end{cases} \tag{$**$}$$

dove (a, b) – le coordinate del punto O' nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ – sono ottenibili facilmente dalla sostituzione precedente:

$$\begin{cases} a = p_{11}\, \alpha + p_{12}\, \beta \\ b = p_{21}\, \alpha + p_{22}\, \beta \end{cases}$$

È chiaro che $(**)$ è equivalente a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

in quanto l'uguaglianza delle ultime componenti è l'identità $1 = 1$.
In analogia con le matrici di rotazione viste prima, la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è detta *matrice di rototraslazione.* In sintesi, la rototraslazione $(**)$ si scrive in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{$\bullet\bullet$}$$

4.4. Osservazione. Una matrice di rotazione P è ortogonale speciale, dunque vale ${}^tP = P^{-1}$ e $\det(P) = 1$. Invece una matrice di rototraslazione Q non è ortogonale (ad esempio in quanto la sua terza colonna non è, in generale, un vettore di norma 1). Tuttavia verifica anch'essa la proprietà: $\det(Q) = 1$.

In quanto segue risulterà utile osservare che:

- operando una rotazione di matrice P, trasponendo ambo i membri di $(\bullet)$ si ottiene

$$(\, x \quad y \,) = (\, \overline{x} \quad \overline{y} \,)\, {}^tP. \tag{${}^t\bullet$}$$

- operando una rototraslazione di matrice Q, trasponendo ambo i membri di ($\bullet\bullet$) si ottiene

$$(\,x \quad y \quad 1\,) = (\,X \quad Y \quad 1\,)\,{}^tQ \qquad ({}^t\bullet\bullet)$$

Si consideri ora una conica C che, nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ ha, rispettivamente, la seguente equazione e forma quadratica:

$$C:\ (\,x \quad y \quad 1\,)\ B\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad F_C(x, y) = (\,x \quad y\,)\ A\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Operando le sostituzioni ($\bullet\bullet$) e (${}^t\bullet\bullet$) nell'equazione si ha

$$C:\ (\,X \quad Y \quad 1\,)\,{}^tQ\ B\ Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che risulta dunque essere l'equazione della conica C nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$.
Se si opera in modo analogo sulla forma quadratica, attaverso le sostituzioni ($\bullet$) e (${}^t\bullet$) si ottiene

$$F_C(\overline{x}, \overline{y}) = (\,\overline{x} \quad \overline{y}\,)\,{}^tP\ A\ P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

che è la forma quadratica di C nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ ottenuto da quello iniziale mediante la sola rotazione. Per concludere occorre la seguente precisazione.

4.5. Proposizione. *La matrice della forma quadratica di una conica non varia cambiando il sistema di riferimento con una traslazione.*

Dimostrazione. Sia consideri una conica C nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ avente forma quadratica

$$F_C(\overline{x}, \overline{y}) = (\,\overline{x} \quad \overline{y}\,)\ \overline{A}\ \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = a_{11}\,\overline{x}^2 + 2\,a_{12}\,\overline{xy} + a_{22}\,\overline{y}^2$$

e si operi la traslazione (7). Dunque, sostituendo $\overline{x} = X - \alpha$ e $\overline{y} = Y - \beta$ nell'espressione precedente, si ottiene

$$a_{11}\,X^2 + 2\,a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 + \{\text{monomi di grado} \leq 1\}.$$

Pertanto la forma quadratica di C nel riferimento $(O'; X, Y)$ risulta

$$F_C(X, Y) = a_{11}\,X^2 + 2\,a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 = (\,X \quad Y\,)\ \overline{A}\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

$\square$

Applicando tale risultato alla forma quadratica di C in $(O; \overline{x}, \overline{y})$ si ottiene che

$$F_C(\overline{x}, \overline{y}) = (\,\overline{x} \quad \overline{y}\,)\,{}^tP\ A\ P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_C(X, Y) = (\,X \quad Y\,)\,{}^tP\ A\ P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

La discussione precedente prova dunque il seguente risultato che descrive come variano le matrici di una conica al cambiare del sistema di riferimento:

4.6. Teorema. *Sia C una conica avente, nel riferimento $(O;x,y)$, come matrice dei coefficienti e matrice della forma quadratica, rispettivamente, le matrici B e A. Se $(O';X,Y)$ è un altro sistema di riferimento, poste Q e P, rispettivamente, le matrici di rototraslazione e di rotazione associate alla trasformazione da $(O;x,y)$ a $(O';X,Y)$, allora le matrici della conica C nel sistema di riferimento $(O';X,Y)$ sono*

$$B' = {}^tQ\; B\; Q \qquad e \qquad A' = {}^tP\; A\; P = P^{-1}\; A\; P.$$

In particolare A e A' sono simili. □

4.6.1. Esempio. Riduciamo a forma canonica la conica

$$C: \quad x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo A come al solito, calcolandone il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autospazi e quindi una base di autovettori per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T(T-2)$$

da cui si ottengono gli autovalori 0 e 2 e gli autospazi associati:

$$V_0 = \ker(f_A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \mathcal{L}((1,1))$$

$$V_2 = \ker(f_{A-2I}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \mathcal{L}((1,-1)).$$

Pertanto la matrice ortogonale speciale P che esprime l'opportuno cambiamento di base è:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(Si noti che l'ordine degli autovettori è scambiato per ottenere $\det(P) = 1$).
Se non operiamo alcuna traslazione, la matrice di rototraslazione ha la forma:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della conica C nel sistema di riferimento $(O;\overline{x},\overline{y})$, dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{Q} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{y} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{y} \end{cases}$$

diventa dunque, per il teorema 4.6, $\overline{B} = {}^t\overline{Q}\, B\, \overline{Q}$ cioè

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'equazione di C nel nuovo sistema di riferimento risulta: $2\overline{x}^2 + 4\sqrt{2}\overline{y} - 1 = 0$, da cui

$$\overline{x}^2 = -2\sqrt{2}\left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

Operando infine la traslazione

$$\begin{cases} X = \overline{x} \\ Y = \overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

si ottiene la parabola, in forma canonica:

$$X^2 = -2\sqrt{2}\, Y$$

le cui matrici associate sono:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si può procedere alla rototraslazione globale mediante la matrice Q che esprima sia la precedente rotazione, sia la traslazione sopra scritta. Determiniamo Q componendo le trasformazioni di rotazione e di traslazione. In tal modo si ottengono le equazioni della rototraslazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{y} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(Y + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right) \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(Y + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine si può verificare che la matrice della conica nel riferimento $(O'; X, Y)$ si ottiene come visto in 4.6:

$${}^tQ\, B\, Q =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = 2B'$$

ed è chiaro che B' e $2B'$ individuano la stessa equazione.

L'esempio precedente suggerisce un metodo per la riduzione di una conica a forma canonica.

4.7. Metodo di riduzione a forma canonica.
Sia C una conica in forma generale in un sistema di riferimento $(O; x, y)$ e siano A e B le matrici associate.

i) Si diagonalizza A, determinando una base ortonormale, $v_1 = (p_{11}, p_{21})$, $v_2 = (p_{12}, p_{22})$, di autovettori.

ii) Posta

$$\overline{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si opera la rotazione corrispondente

$$\begin{cases} x = p_{11}\overline{x} + p_{12}\overline{y} \\ y = p_{21}\overline{x} + p_{22}\overline{y} \end{cases} . \tag{$*$}$$

Nel sistema $(O; \overline{x}, \overline{y})$ la conica ha matrice $\overline{B} = {}^t\overline{Q}B\overline{Q}$, cioè equazione priva del monomio $\overline{x}\ \overline{y}$.

iii) Si opera la traslazione da $(O; \overline{x}, \overline{y})$ a $(O'; X, Y)$ indotta dal Metodo del completamento dei quadrati:

$$\begin{cases} X = \overline{x} + a \\ Y = \overline{y} + b \end{cases} .$$

Sostituendo le conseguenti espressioni di $\overline{x}$ e $\overline{y}$ nell'equazione di C nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$:

$$(\,\overline{x} \quad \overline{y} \quad 1\,)\,\overline{B} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

si ottiene l'equazione di C nel sistema $(O'; X, Y)$. Per quanto detto tale equazione è una sua forma canonica.

iv) Infine le equazioni della rototraslazione da $(O; x, y)$ a $(O'; X, Y)$ si ottengono sostituendo le equazioni della traslazione in $(*)$.

La discussione precedente e tale metodo costituiscono la dimostrazione del seguente:

4.8. Teorema. *Sia C una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O; x, y)$; allora esiste un sistema di riferimento $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante rototraslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.* □

4.9. Corollario. *Data un'equazione di secondo grado in x e y, il luogo degli zeri di tale equazione è uno dei seguenti luoghi geometrici: ellisse, iperbole, parabola, unione di due rette (distinte o coincidenti).* □