Capitolo XI
GEOMETRIA LINEARE AFFINE EUCLIDEA

1. Spazi affini euclidei

Se, in luogo dello spazio affine costruito a partire dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, si considera quello associato allo spazio euclideo reale E^n si ottiene un spazio affine nel quale si possono introdurre nuove nozioni quali l'ortogonalità, le distanze e gli angoli.

1.1. Definizione. Lo spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ associato allo spazio euclideo E^n si dice *spazio affine euclideo* e si denota con $\mathbb{E}^n$.

Poiché in uno spazio vettoriale euclideo si può parlare di basi ortonormali, rispetto alle quali molti calcoli sono particolarmente semplici, introduciamo dei sistemi di riferimento che si riconducono al concetto di base ortonormale. Si noti, inoltre, che se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di E^n, allora la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$, cioè $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica, è ortogonale per definizione (Cap. IX); in particolare $\det(M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}) = \pm 1$.

Usando basi ortonormali si ha la definizione di sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

1.2. Definizione. Un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{E}^n$ si dice *cartesiano ortogonale* se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di E^n e $\det(M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}) = 1$.

D'ora in poi considereremo solo riferimenti cartesiani ortogonali.

1.2.1. Esempio. Sia r la retta di equazione $(x, y) = (1, -2) + \lambda(1, -1)$. Per determinare una equazione cartesiana di r possiamo operare nel modo consueto (eliminando il parametro) oppure osservando che un vettore ortogonale ad r è, ad esempio, $u = (1, 1)$; dunque, posti $A = (1, -2) \in r$ e $v = (1, -1)$, si ha:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \iff P - A \in \mathcal{L}(v) \iff \\ \iff (P - A) \cdot u = 0 \iff (x - 1, y + 2) \cdot (1, 1) = 0, \end{aligned}$$

da cui

$$r: \quad x + y + 1 = 0.$$

In generale, se r è la retta di $\mathbb{E}^2$ di equazione vettoriale $P = A + \lambda v$ ed u è un vettore ortogonale ad r, cioè $S_r^\perp = \mathcal{L}(u)$ (ricordando che S_r denota la giacitura di r) si ha

$$P \in r \iff (P - A) \cdot u = 0.$$

Quest'ultima equazione si dice *equazione normale* della retta r.

Generalizzando ad un qualsiasi iperpiano di $\mathbb{E}^n$ si ha la seguente:

1.3. Proposizione. *Siano $H \subset \mathbb{E}^n$ un iperpiano e A un suo punto. Se $u \in \mathbb{R}^n$ è un vettore non nullo ortogonale alla giacitura S_H di H, cioè $\mathcal{L}(u) = S_H^\perp$, allora*

$$P \in H \quad \iff \quad (P - A) \cdot u = 0.$$

□

1.4. Definizione. L'equazione

$$H: \quad (P-A)\cdot u = 0$$

si dice *equazione normale* dell'iperpiano H. In particolare, se $n=2$ si ha l'equazione normale della retta nel piano; se $n=3$, si ha l'equazione normale del piano nello spazio.

1.5. Osservazione. Si noti che l'equazione normale di un iperpiano H non è univocamente determinata, in quanto il punto A può variare in H ed il vettore u è individuato a meno di uno scalare.

1.6. Osservazione. Si noti che, se H ha equazione cartesiana $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, allora $S_H^\perp = \mathcal{L}((a_1,\ldots,a_n))$; infatti

$$\begin{aligned} S_H &= \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n = 0\} = \\ &= \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid (a_1,\ldots,a_n)\cdot(x_1,\ldots,x_n) = 0\} \end{aligned}$$

dunque $S_H^\perp = \mathcal{L}((a_1,\ldots,a_n))$ e quindi un'equazione normale di H è

$$(P-A)\cdot(a_1,\ldots,a_n) = 0$$

dove A è un qualunque punto di H.

1.6.1. Esempio. Vogliamo determinare le equazioni normale e cartesiana del piano π di $\mathbb{E}^3$, passante per il punto $A=(1,0,-1)$ e la cui giacitura è ortogonale al vettore $u=(1,2,3)$. Per quanto visto, si ha

$$\pi: \quad (x-1, y, z+1)\cdot(1,2,3) = 0,$$

da cui

$$\pi: \quad x+2y+3z+2 = 0.$$

1.6.2. Esempio. Vogliamo determinare l'equazione normale di una retta del piano a partire dalla sua equazione cartesiana. Sia ad esempio $r: 2x-3y+3=0$; poiché, da 1.6, un vettore normale ad r è $u=(2,-3)$ e $(0,1)$ è un suo punto, un'equazione normale di r è

$$(x, y-1)\cdot(2,-3) = 0.$$

Come abbiamo visto, l'equazione normale di un iperpiano è strettamente legata alla sua equazione cartesiana. Non è quindi sorprendente il fatto che per dare in forma normale una generica VLA che non sia un iperpiano si abbia bisogno di più relazioni. Illustriamo questo fatto con un esempio.

1.6.3. Esempio. Vogliamo determinare l'equazione cartesiana della retta $r\subset\mathbb{E}^3$ passante per il punto $A=(1,2,-3)$ e ortogonale al sottospazio vettoriale $\mathcal{L}((1,1,0),(0,1,-1))$. Bisogna quindi imporre due condizioni di ortogonalità che determinano l'equazione normale delle retta:

$$\begin{cases} (x-1, y-2, z+3)\cdot(1,1,0) &= 0 \\ (x-1, y-2, z+3)\cdot(0,1,-1) &= 0 \end{cases}.$$

Di consequenza, l'equazione cartesiana di r è:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ y-z-5=0 \end{cases}.$$

2.1. Definizione.

a) Diremo che due rette $r, r' \subset \mathbb{E}^n$ sono *ortogonali* se, poste $v, v' \in E^n$ le rispettive direzioni (ovvero $v \in S_r$ e $v' \in S_{r'}$), i vettori v e v' sono tra loro ortogonali.

b) Diremo che due piani $\pi, \pi' \subset \mathbb{E}^3$ sono *ortogonali* se, poste $u, u' \in E^3$ le rispettive direzioni ortogonali (cioè $S_\pi^\perp = \mathcal{L}(u)$ e $S_{\pi'}^\perp = \mathcal{L}(u')$), i vettori u e u' sono tra loro ortogonali.

c) Diremo che una retta r e un piano π di $\mathbb{E}^3$ sono *ortogonali* se, posta v una direzione di r e u una direzione ortogonale a π, i vettori v e u di E^3 sono linearmente dipendenti.

2.1.1. Esempio. Si considerino le seguenti rette del piano euclideo:

$$\begin{array}{llll} r: & 2x - 2y + 1 = 0; & r': & x + y + 3 = 0 \\ r'': & (x, y) = (1, -3) + \lambda(1, 1); & r''': & (x + 1, y - 4) \cdot (1, 2) = 0. \end{array}$$

Dire quali coppie di rette tra le precedenti sono ortogonali.
Detti v, v', v'', v''' i vettori direzione delle rette r, r', r'', r''', rispettivamente, si ha

$$v = (2, 2), \quad v' = (-1, 1), \quad v'' = (1, 1), \quad v''' = (-2, 1)$$

e chiaramente le sole coppie di rette ortogonali sono $r \perp r'$, $r' \perp r''$.

2.1.2. Esempio. Si considerino le due rette di $\mathbb{E}^3$:

$$r: \quad (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(3, 0, -1), \qquad r': \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda' \\ y = 2 - 2\lambda' \\ z = 3\lambda' \end{cases}.$$

Posti $v = (3, 0, -1)$ e $v' = (1, -2, 3)$ due vettori paralleli ad r ed r', rispettivamente, si osserva che v e v' sono ortogonali in quanto

$$v \cdot v' = (3, 0, -1) \cdot (1, -2, 3) = 0.$$

Quindi r ed r' sono ortogonali. Osserviamo, infine, che $v \in S_{r'}^\perp$ (e quindi $S_r = \mathcal{L}(v) \subset S_{r'}^\perp$) e, analogamente, $v' \in S_r^\perp$ (e quindi $S_{r'} = \mathcal{L}(v') \subset S_r^\perp$).

2.1.3. Esempio. Nello spazio $\mathbb{E}^3$ si consideri il piano $\pi: \ x - y + 2z - 3 = 0$; vogliamo determinare la retta r ortogonale a π e passante per il punto $A = (1, 2, 1)$.
Poiché $S_\pi^\perp = \mathcal{L}((1, -1, 2))$, si ha

$$r: \quad (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2).$$

2.1.4. Esempio. Nello spazio $\mathbb{E}^3$ si consideri la retta di equazione

$$r: \quad \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y \qquad\qquad = 0 \end{cases}.$$

Determinare:

1) l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per il punto $A = (-1, -1, -1)$;

2) l'intersezione di r e π.

1) Ricaviamo un'equazione parametrica di r ponendo, ad esempio, $y = \lambda$:

$$r: \quad \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

quindi r ha per direzione il vettore $(-1, 1, 3)$, pertanto l'equazione normale di π è

$$\pi: \quad (x+1, y+1, z+1) \cdot (-1, 1, 3) = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \pi: \quad x - y - 3z - 3 = 0.$$

2) La retta r e il piano π si intersecano in un solo punto P ottenuto come soluzione del sistema:

$$P = r \cap \pi: \quad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y \qquad\;\; = 0 \\ x - y - 3z = 3 \end{cases}.$$

Si verifica che $P = (6/11, -6/11, -7/11)$.

2.1.5. Esempio. Si considerino le rette ortogonali r ed r' dell'esempio 2.1.2; vogliamo determinare il piano π tale che $\pi \supset r$ e π è ortogonale a r'. Per 1.6, il generico piano ortogonale a r' ha un'equazione del tipo

$$\pi_d: \quad x - 2y + 3z + d = 0$$

dove d è un parametro reale. Chiaramente $\pi_d \supset r$ se e solo se le coordinate dei punti di r soddisfano la precedente equazione per ogni valore di λ, cioè se

$$(1 + 3\lambda) - 2 \cdot 2 + 3(1 - \lambda) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0.$$

Pertanto π ha equazione $x - 2y + 3z = 0$.

2.1.6. Esempio. Si considerino i piani π e π' di $\mathbb{E}^3$ di equazioni:

$$\pi: \quad 2x + y - z - 3 = 0\,, \qquad \pi': \quad x + y + 3z - 1 = 0.$$

I vettori $u = (2, 1, -1)$ e $u' = (1, 1, 3)$, ortogonali a π e a π', rispettivamente, sono ortogonali tra loro; infatti:

$$u \cdot u' = (2, 1, -1) \cdot (1, 1, 3) = 0.$$

Dunque i piani π e π' sono ortogonali.

Osservando che $S_\pi^\perp = \mathcal{L}((2, 1, -1))$, si noti che

$$(2, 1, -1) \in S_{\pi'} = \{(a, b, c,) \mid a + b + 3c = 0\}$$

e dunque $S_\pi^\perp \subset S_{\pi'}$. In modo analogo si verifica che $S_{\pi'}^\perp \subset S_\pi$. Tale fatto vale in generale:

2.2. Osservazione. Due piani $\pi, \pi' \subset \mathbb{E}^3$ sono ortogonali se e solo se $S_\pi^\perp \subset S_{\pi'}$ (oppure se e solo se $S_{\pi'}^\perp \subset S_\pi$).

2.3. Esercizio di ricapitolazione. Si considerino le rette $r, s \subset \mathbb{E}^3$ di equazioni

$$r: \quad (x,y,z) = (1,2,1) + \lambda(3,0,-1), \qquad s: \quad \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

ed il punto $A = (1,0,1)$. Vogliamo determinare:

a) la famiglia $\mathcal{F}$ delle rette ortogonali ad r e passanti per A;

b) la retta l di $\mathcal{F}$ parallela al piano $\pi : x - y + z + 2 = 0$;

c) la retta l' di $\mathcal{F}$ ortogonale ad s;

d) le rette ortogonali ad r contenute nel piano $y - 2 = 0$.

a) Sia $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; $v \perp S_r$ se e solo se $(a,b,c) \cdot (3,0,-1) = 0$ se e solo se $c = 3a$. Pertanto la famiglia richiesta è costituita dalle rette r_α di equazione:

$$r_\alpha: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(1,\alpha,3)$$

ottenuta per $a \neq 0$, e dalla retta

$$\overline{r}: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(0,1,0)$$

ottenuta per $a = c = 0$. In sintesi: $\mathcal{F} = \{r_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}} \cup \{\overline{r}\}$.
b) Poiché il vettore $(0,1,0)$ non è parallelo a π, la retta l non può essere $\overline{r}$ e va quindi ricercata tra le rette r_α. Basta imporre dunque che il vettore $(1,\alpha,3)$ appartenga alla giacitura di π, cioè che sia ortogonale al vettore $(1,-1,1)$. Da cui $(1,\alpha,3) \cdot (1,-1,1) = 4 - \alpha = 0$ e quindi $\alpha = 4$. Pertanto

$$l: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(1,4,3).$$

c) Un vettore direzione di s si ottiene passando ad equazione parametrica, cioè risolvendo il sistema corrispondente alla sua equazione cartesiana:

$$s: \quad (x,y,z) = (-1+\eta, 1+2\eta, \eta) = (-1,1,0) + \eta(1,2,1).$$

Richiedere che r_α sia ortogonale ad s equivale a imporre che i vettori $(1,\alpha,3)$ e $(1,2,1)$ siano ortogonali, cioè $(1,\alpha,3) \cdot (1,2,1) = 4 + 2\alpha = 0$, dunque $\alpha = -2$; pertanto

$$l': \quad (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(1,-2,3).$$

D'altra parte $\overline{r}$ non è ortogonale ad s, in quanto $(0,1,0) \cdot (1,2,1) = 2 \neq 0$.
d) Sia π_h il generico piano ortogonale ad r:

$$\pi_h: \ 3x - z + h = 0.$$

Le rette richieste devono appartenere ai piani π_h e anche al piano $y - 2 = 0$, dunque sono

$$t_h: \quad \begin{cases} 3x - z + h = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}, \quad \text{dove} \quad h \in \mathbb{R}.$$

3. Distanze tra varietà lineari

È ben noto che la distanza di due punti A e B nel piano è definita come la lunghezza del segmento avente per estremi A e B, cioè il modulo del vettore $B - A$. Diamo dunque in generale la seguente:

3.1. Definizione. Siano A e B due punti di $\mathbb{E}^n$; si dice *distanza* di A da B, e si indica con $d(A, B)$, il numero reale $\|B - A\| = (B - A) \cdot (B - A)$.

3.1.1. Esempio. Siano $A = (1, 2, 0, -1)$ e $B = (0, -1, 2, 2)$ due punti di $\mathbb{E}^4$; allora

$$d(A, B) = \|(-1, -3, 2, 3)\| = \sqrt{23}.$$

Dalle proprietà del prodotto scalare segue immediatamente:

3.2. Proposizione. *Valgono le seguenti proprietà:*

i) $d(A, B) \geq 0$ *per ogni* $A, B \in \mathbb{E}^n$*;*

ii) $d(A, B) = 0$ *se e solo se* $A = B$*;*

iii) $d(A, B) = d(B, A)$ *per ogni* $A, B \in \mathbb{E}^n$*;*

iv) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ *per ogni* $A, B, C \in \mathbb{E}^n$*.* □

Vediamo ora come estendere la nozione di distanza tra due punti a quella di distanza tra un punto e una varietà lineare. Si consideri ad esempio la retta r di equazione $(x, y) = (1, 1) + \lambda(1, -1)$ e il punto $A = (0, 0)$ del piano $\mathbb{E}^2$; denotando con P_λ il generico punto di r: $P_\lambda = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$ si ha

$$d(A, P_\lambda) = \sqrt{2 + 2\lambda^2}.$$

Si verifica che tale funzione di λ assume tutti i valori compresi tra $\sqrt{2}$ e $+\infty$. E' naturale quindi chiamare *distanza* tra r ed A il minimo di tali valori, cioè $\sqrt{2}$.

3.3. Definizione. Siano L una varietà lineare e A un punto di $\mathbb{E}^n$; si definisce *distanza* di A da L e si denota con $d(A, L)$ il numero reale non negativo

$$d(A, L) = \min\{d(A, B) \mid B \in L\}.$$

3.4. Osservazione. Si vede immediatamente che $d(A, L) = 0$ se e solo se $A \in L$; proveremo inoltre che esiste $A_0 \in L$ tale che $d(A, A_0) = d(A, L)$ e quindi la definizione precedente è ben posta.

3.5. Proposizione. *Siano L una varietà lineare e A un punto di $\mathbb{E}^n$; allora*

$$d(A, L) = d(A, A_0) \quad dove \quad A_0 = L \cap (A + S_L^\perp)$$

è detto proiezione ortogonale di A su L e $A + S_L^\perp$ denota la varietà lineare affine di giacitura $S_L^\perp$ e passante per il punto A.

Dimostrazione. L'intersezione $L \cap (A+S_L^\perp)$ consiste di un solo punto, che indichiamo con A_0. Dalla definizione dobbiamo provare che il minimo delle distanze $d(A,B)$ con $B \in L$ si ottiene proprio per $B = A_0$. Sia dunque B un qualunque punto di L; il vettore $A - B$ si decompone in

$$A - B = (A - A_0) + (A_0 - B)$$

dove $A_0 - B \in S_L$ in quanto A_0 e B appartengono a L, mentre $A - A_0 \in S_L^\perp$, in quanto A e A_0 appartengono alla varietà lineare $A + S_L^\perp$. Quindi $(A - A_0) \cdot (A_0 - B) = 0$ e pertanto

$$\begin{aligned}(d(A,B))^2 = \|A - B\|^2 = \|(A - A_0) + (A_0 - B)\|^2 = \\ = \|A - A_0\|^2 + \|A_0 - B\|^2.\end{aligned}$$

Quindi

$$(d(A,B))^2 \geq \|A - A_0\|^2 = (d(A,A_0))^2$$

per ogni $B \in L$, da cui la tesi. $\square$

Calcoliamo alcune distanze usando 3.5.

3.5.1. Esempio. Trovere la distanza tra la retta $r : 2x + y + 4 = 0$ e il punto $A = (1,-1)$ di $\mathbb{E}^2$. Iniziamo col calcolare la retta $s_A = A + S_r^\perp$, ortogonale a r e passante per A:

$$s_A : \quad (x,y) = (1,-1) + \lambda(2,1).$$

Dunque

$$A_0 = r \cap s_A : \quad 2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) + 4 = 0$$

da cui risulta $\lambda = -1$ e quindi $A_0 = (-1,-2)$. Pertanto

$$d(A,r) = d(A,A_0) = \|(2,1)\| = \sqrt{5}.$$

3.5.2. Esempio. In $\mathbb{E}^3$ si considerino la retta $r : \ (x,y,z) = (1,2,1) + \lambda(1,-1,2)$ e il punto $A = (1,-1,0)$; per calcolare la distanza di r da A, determiniamo dapprima il piano $\pi_A := A + S_r^\perp$. Un vettore ortogonale a tale piano è, ad esempio $(1,-1,2)$; applicando 1.6 si vede che π_A ha un'equazione del tipo:

$$x - y + 2z + d = 0.$$

Per determinare d basta imporre il passaggio per il punto A: $1 + 1 + d = 0$; pertanto $d = -2$, da cui

$$\pi_A : \quad x - y + 2z - 2 = 0.$$

Infine, per determinare A_0, basta intersecare r con π_A:

$$(1 + \lambda) - (2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 2 = 0,$$

da cui $\lambda = 1/6$. Pertanto $A_0 = (7/6, 11/6, 4/3)$ e

$$d(A,r) = d(A,A_0) = \|(1/6, 17/6, 4/3)\| = \sqrt{354}/6.$$

Si può determinare una formula che permette di calcolare in modo più rapido la distanza di un punto da un iperpiano.

3.7. Teorema. *Siano* $H: \ a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$ *un iperpiano e* $Q=(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)\in\mathbb{E}^n$*. Allora*

$$d(Q,H)=\frac{|a_1\overline{x}_1+\cdots+a_n\overline{x}_n+b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Ponendo $X:=(x_1,\dots,x_n)$ e $A:=(a_1,\dots,a_n)$ e considerandoli come vettori, l'equazione di H può essere scritta come:

$$H: \quad A\cdot X+b=0,$$

dove il prodotto è ovviamente il prodotto scalare di E^n. Come visto, $A\in S_H^{\perp}$. Inoltre, la proiezione ortogonale di Q su H è $Q_0=H\cap r$, dove r è la retta passante per Q e ortogonale ad H, cioè:

$$r: \quad P=Q+\lambda A.$$

Pertanto $H\cap r$ si ottiene sostituendo P al posto di X nell'equazione di H:

$$A\cdot(Q+\lambda A)+b=0 \quad\Rightarrow\quad A\cdot Q+\lambda A\cdot A+b=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{A\cdot Q+b}{A\cdot A}.$$

Sostituendo tale valore di λ nell'equazione di r e tenendo presente che $A\cdot A=\|A\|^2$, si ottiene dunque il punto

$$Q_0=Q-\frac{A\cdot Q+b}{\|A\|^2}\,A.$$

Pertanto

$$d(Q,H)^2=d(Q,Q_0)^2=\|Q-Q_0\|^2=\left\|\frac{A\cdot Q+b}{\|A\|^2}\,A\right\|^2=\frac{|A\cdot Q+b|^2}{\|A\|^4}\,\|A\|^2=\frac{|A\cdot Q+b|^2}{\|A\|^2}$$

e quindi

$$d(Q,H)=\frac{|A\cdot Q+b|}{\|A\|}=\frac{|a_1\overline{x}_1+\cdots+a_n\overline{x}_n+b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$

□

3.7.1. Esempio. Col metodo precedente, calcoliamo la distanza $d(A,r)$ dove $r: \ 2x+y+4=0$ e $A=(1,-1)$ sono come nell'esempio 3.5.1:

$$d(A,r)=\frac{|2-1+4|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}.$$

3.7.2. Esempio. Calcoliamo la distanza tra il punto A e il piano π di $\mathbb{E}^3$, dove $A=(1,2,-1)$ e $\pi: \ x+2y-2z+3=0$:

$$d(A,\pi)=\frac{|1+4+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{10}{3}.$$

Vediamo ora la definizione e alcuni esempi di distanza tra V.L.A. La definizione 3.3 si generalizza in modo naturale alla seguente

3.8. Definizione. Siano L e L' due varietà lineari affini in $\mathbb{E}^n$; si definisce *distanza* di L da L' e si denota con $d(L, L')$ il numero reale non negativo

$$d(L, L') = \min\{d(A, A') \mid A \in L, A' \in L'\}.$$

Si vede immediatamente che $d(L, L') = 0$ se e solo se $L \cap L' \neq \emptyset$. Si può provare che, se $L \cap L' = \emptyset$, allora la definizione precedente è ben posta. Esplicitamente: esistono due punti $\overline{A} \in L$, $\overline{A}' \in L'$ che realizzano la minima distanza, cioè tali che $d(\overline{A}, \overline{A}') \leq d(A, A')$, per ogni $A \in L$ e $A' \in L'$. Dunque per tali punti si ha $d(L, L') = d(\overline{A}, \overline{A}')$.

Vediamo alcune osservazioni ed esempi. Per quanto detto, sono significative le distanze tra varietà lineari affini non incidenti. I casi particolari che esamineremo sono:

- due rette parallele in $\mathbb{E}^2$;
- due piani paralleli in $\mathbb{E}^3$;
- una retta e un piano paralleli in $\mathbb{E}^3$;
- due rette parallele in $\mathbb{E}^3$.

3.9. Osservazione. Si considerino due rette distinte $r, r' \subset \mathbb{E}^2$ non incidenti. Dunque r e r' sono parallele. Osserviamo dapprima che

$$d(r, r') = d(A, r') = d(A', r)$$

dove A è un qualunque punto di r e A' è un qualunque punto di r'.
Infatti, come visto nella dimostrazione di 3.5, se A e A' sono due punti qualunque di r e r', allora $d(A, A') \geq d(A, A_0)$, dove A_0 è la proiezione ortogonale di A su r'. Inoltre, sempre per 3.5, $d(A, A_0) = d(A, r')$. Dunque $d(A, A') \geq d(A, r')$; pertanto, per la definizione 3.8, si ha $d(r, r') = d(A, r')$, per ogni $A \in r$.

3.10. Osservazione. Siano date le equazioni cartesiane di due rette parallele r e r' di E^2:

$$r: \ ax + by + c = 0, \quad r': \ ax + by + c' = 0.$$

Sia $A = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in r$, dunque $a\overline{x}_1 + b\overline{x}_2 + c = 0$. Da tale uguaglianza e da 3.7 segue

$$d(A, r') = \frac{|a\overline{x}_1 + b\overline{x}_2 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

e dunque

$$d(r, r') = d(A, r') = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3.10.1. Esempio. Siano $r: \ 2x + y - 3 = 0$ e $r': \ 2x + y + 2 = 0$ allora

$$d(r, r') = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

In modo analogo, usando 3.7, si prova una formula per la distanza tra due iperpiani paralleli:

3.11. Proposizione. *Se H e H' sono due iperpiani paralleli di $\mathbb{E}^n$, di equazioni:*

$$H: \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \quad H': \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b' = 0,$$

allora la distanza tra H e H' coincide con la distanza tra Q e H', dove Q è un qualunque punto di H e quindi

$$d(H, H') = \frac{|b - b'|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Come in 3.7, ponendo $X := (x_1, \ldots, x_n)$ e $A := (a_1, \ldots, a_n)$, le equazioni dei due iperpiani possono essere scritte come:

$$H: \quad A \cdot X + b = 0, \qquad H': \quad A \cdot X + b' = 0.$$

Chiaramente $d(H, H') = d(Q, H')$ e, poiché $Q \in H$, si ha $A \cdot Q + b = 0$; dunque $A \cdot Q = -b$ e quindi

$$d(H, H') = d(Q, H') = \frac{|A \cdot Q + b'|}{\|A\|} = \frac{|-b + b'|}{\|A\|}$$

come volevamo. □

3.11.1. Esempio. Determiniamo la distanza tra i piani paralleli di $\mathbb{E}^3$

$$\pi : x + 2y - z + 2 = 0, \qquad \pi' : x + 2y - z - 4 = 0.$$

Per 3.11 si ha:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|2 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

Si verifica infatti che, se ad esempio $A = (0, 0, 2) \in \pi$, allora $d(A, \pi') = \sqrt{6} = d(\pi, \pi')$.

Tuttavia due V.L.A. parallele non hanno necessariamente la stessa dimensione; vediamo un primo risultato in un caso particolare:

3.12. Proposizione. *Siano r e H una retta e un iperpiano paralleli in $\mathbb{E}^n$. Allora*

$$d(r, H) = d(\overline{P}, H)$$

dove $\overline{P}$ è un qualunque punto di r.

Dimostrazione. Come al solito, scriviamo $H: \ A \cdot X + b = 0$ e $r: \ P = \overline{P} + \lambda v$, dove $\overline{P} \in r$ e v è un vettore ortogonale ad A, in quanto r ed H sono paralleli, cioè $v \cdot A = 0$. Quindi, calcolando la distanza del generico punto P di r da H si ottiene, per 3.7:

$$d(P, H) = \frac{|A \cdot P + b|}{\|A\|} = \frac{|A \cdot (\overline{P} + \lambda v) + b|}{\|A\|} = \frac{|A \cdot \overline{P} + b|}{\|A\|}$$

e tale espressione non dipende da λ ed è uguale a $d(\overline{P}, H)$. □

3.12.1. Esempio. Si considerino la retta r ed il piano π di $\mathbb{E}^3$ dati da:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \pi: \ 2x - y + z + 3 = 0.$$

Poiché r e π sono paralleli, per determinare la loro distanza basta scegliere un punto $P \in r$ e calcolare $d(P, \pi)$; ad esempio sia $P = (1, 0, 0)$, quindi $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

3.12.2. Esempio. Determiniamo la distanza tra le due rette parallele di $\mathbb{E}^3$ di equazioni:

$$r: \ (x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(1, 2, 0), \quad r': \ (x, y, z) = (-1, -2, 3) + \lambda(1, 2, 0).$$

Tale distanza si può determinare usando i metodi visti in 3.5 e 3.5.2, cioè: $d(r, r') = d(A, r') = d(B, r)$ dove A è un qualunque punto di r e B è un qualunque punto di r'. Un metodo alternativo usa il fatto (facile da provare) che, fissato un qualunque piano π ortogonale ad entrambe le rette, allora

$$d(r, r') = d(R, R') \quad \text{dove} \quad R = r \cap \pi, \quad R' = r' \cap \pi.$$

Sia dunque π il piano per l'origine, ortogonale a entrambe le rette: $\pi : x + 2y = 0$. Quindi $R = (2, -1, 2)$ e $R' = (0, 0, 3)$ e $d(R, R') = \sqrt{6}$.

Resta un'ultima situazione da esaminare: due rette sghembe di $\mathbb{E}^3$. Ci limitiamo ad osservare che, anche in questo caso, se r ed r' sono tali rette, allora esistono due punti $P \in r$ e $P' \in r'$ tali che $d(r, r') = d(P, P')$ e tali punti sono le intersezioni di r e r', rispettivamente, con l'unica retta ortogonale e incidente sia r che r' (detta quindi *retta di minima distanza*).

4. Fasci di rette e piani

Una nozione molto utile per risolvere vari problemi di geometria lineare nel piano e nello spazio è quella di "fascio" di rette o di piani.

4.1. Definizione. Sia A un punto del piano affine $\mathbb{E}^2$; si dice *fascio di rette* di *centro* A, denotato $\mathcal{F}_A$, l'insieme delle rette di $\mathbb{E}^2$ passanti per A.

Il seguente risultato è evidente

4.2. Proposizione. *Sia $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{E}^2$; allora l'equazione cartesiana della generica retta del fascio $\mathcal{F}_A$ data da*

$$\mathcal{F}_A : \quad \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0.$$

per una scelta arbitraria dei parametri reali λ e μ non entrambi nulli, ovvero $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4.2.1. Esempio. L' equazione del fascio di rette per il punto $A = (1, -2)$ è dato da

$$\mathcal{F}_A : \quad \lambda(x - 1) + \mu(y + 2) = 0.$$

Il fascio $\mathcal{F}_A$ può essere generato da una qualunque coppia di rette distinte passanti per A nel senso della proposizione seguente di cui omettiamo la dimostrazione.

4.3. Proposizione. *Sia* $A \in \mathbb{E}^2$ *l'unico punto di intersezione delle rette*

$$r: \quad ax + by + c = 0\ , \qquad r': \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Allora tutte e sole le rette di $\mathcal{F}_A$ *sono quelle di equazione:*

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{1}$$

dove $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

4.4. Definizione. Se il fascio di rette $\mathcal{F}_A$ è dato con l'equazione (1), allora le rette (distinte) $r: \ ax + by + c = 0$ e $r': \ a'x + b'y + c' = 0$ sono dette *generatori* del fascio e si dice che $\mathcal{F}_A$ è *generato* da r ed r'; useremo anche la notazione $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}(r, r')$.

Si noti che non c'è corrispondenza biunivoca tra le coppie (λ, μ) e le rette di un fascio $\mathcal{F}$. Infatti le coppie (λ_0, μ_0) e $(\rho\lambda_0, \rho\mu_0)$ individuano la stessa retta di $\mathcal{F}$.

4.4.1. Esempio. La retta $r: \ x + y + 1 = 0$ appartiene al fascio $\mathcal{F}_A$ di 4.2.1. Infatti si può ottenere per $\lambda = 1$ e $\mu = 1$, oppure per ogni coppia del tipo $(\lambda, \mu) = (\rho, \rho)$, con $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.4.2. Esempio. Sia dato il fascio di rette

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(x - y + 3) + \mu(2x + y + 3) = 0.$$

Determinare:

- *a*) il centro di $\mathcal{F}$;
- *b*) la retta di $\mathcal{F}$ ortogonale alla retta $r: \ 3x + y - 1 = 0$;
- *c*) la retta di $\mathcal{F}$ parallela alla retta $s: \ x - y = 0$;
- *d*) la retta di $\mathcal{F}$ passante per il punto $B = (1, 1)$.

a) Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $(-2, 1)$.
b) Riscrivendo l'equazione del fascio nel modo seguente:

$$\mathcal{F}: \quad (\lambda + 2\mu)x + (-\lambda + \mu)y + 3(\lambda + \mu) = 0$$

si ottiene il vettore parallelo alla generica retta di $\mathcal{F}$, che risulta essere $(\lambda - \mu, \lambda + 2\mu)$. Tale vettore deve essere ortogonale ad un vettore parallelo ad r, ad esempio $(-1, 3)$; dunque deve essere:

$$(\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) \cdot (-1, 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + 7\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \mu) = (7, -2).$$

Pertanto la retta richiesta è

$$(7 + 2(-2))x + (-7 + (-2))y + 3(7 + (-2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3y + 5 = 0.$$

c) Basta che il vettore $(\lambda - \mu, \lambda + 2\mu)$ sia ortogonale ad un vettore ortogonale ad s, ad esempio $(1, -1)$; da cui

$$(\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) \cdot (1, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \mu) = (1, 0)$$

e pertanto la retta richiesta è il primo generatore di $\mathcal{F}$, cioè la retta $x - y + 3 = 0$.
d) Imponiamo il passaggio per il punto B alla generica retta di $\mathcal{F}$, ottenendo

$$3\lambda + 6\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \mu) = (2, -1).$$

Quindi la retta cercata è $y - 1 = 0$.

4.5. Osservazione. La situazione vista nel punto d) dell'esempio precedente è generale: infatti se $\mathcal{F}_A$ è un fascio di rette, allora per ogni punto P del piano ($P \neq A$) passa una ed una sola retta di $\mathcal{F}_A$, cioè la retta $r_{A,P}$ per i due punti A, P.

4.6. Definizione. Sia $r : ax + by + c = 0$, una retta del piano affine $\mathbb{E}^2$. Per analogia con i fasci di rette di sostegno un punto, l'insieme $\mathcal{F}$ delle rette parallele ad r viene detto *fascio di rette parallele* o *fascio improprio* di rette. L'equazione più conveniente per esprimere il fascio improprio delle rette parallele ad r è

$$\mathcal{F} : \quad ax + by + h = 0 \ , \quad h \in \mathbb{R}.$$

4.6.1. Esempio. Sia r la retta di equazione $r : \ 2x - y + 3 = 0$; determiniamo le rette parallele ad r ed aventi distanza $\sqrt{5}$ da r.
Le rette parallele ad r hanno equazione

$$r_h : \quad 2x - y + h = 0.$$

Tra esse ricerchiamo quelle distanti $\sqrt{5}$ da r; per 3.11 si ha

$$\sqrt{5} = d(r_h, r) = \frac{|h - 3|}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad |h - 3| = 5 \quad \Rightarrow \quad h - 3 = \pm 5.$$

Quindi si ottengono le due rette

$$r_8 : \quad 2x - y + 8 = 0 \ , \qquad r_{-2} : \quad 2x - y - 2 = 0.$$

In modo del tutto analogo a quanto visto per le rette nel piano, si danno la nozione di fascio di piani nello spazio e le relative proprietà.

4.7. Definizione.

i) Sia r una retta di $\mathbb{E}^3$, si dice *fascio di piani* di *sostegno* r, denotato $\mathcal{F}_r$, l'insieme di tutti i piani contenenti r;

ii) Sia π un piano di $\mathbb{E}^3$, si dice *fascio di piani paralleli* a π (o *fascio improprio* di piani) l'insieme di tutti i piani paralleli a π.

Analogamente alla 4.2 si ha la seguente:

4.8. Proposizione. *Sia r la retta di $\mathbb{E}^3$ avente equazione cartesiana*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases};$$

allora il fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di sostegno r è l'insieme di tutti e soli i piani di equazione

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{2}$$

dove λ e μ sono due parametri reali non entrambi nulli. □

4.9. Definizione. Se il fascio di piani $\mathcal{F}_r$ è dato con l'equazione (2), allora i piani (distinti) $\pi :\ ax + by + cz + d = 0$ e $\pi' :\ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono detti *generatori* del fascio e si dice che $\mathcal{F}_r$ è *generato* da π ed π'; useremo anche la notazione $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}(\pi, \pi')$.

4.10. Osservazione. Il fascio di piani $\mathcal{F}_r$ può essere generato da ogni coppia di piani per r purchè distinti.

4.10.1. Esempio. Determinare il fascio $\mathcal{F}$ di piani di sostegno la retta

$$r : \quad (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(2, 3, 1).$$

Inoltre, determinare il piano $\pi \in \mathcal{F}$ passante per il punto $A = (1, 2, 3)$ e il piano $\sigma \in \mathcal{F}$ ortogonale a $v = (1, -1, 1)$.

Un'equazione cartesiana di r si ottiene, ad esempio, eliminando λ dalla terza equazione:

$$\begin{cases} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 2 + 3\lambda \\ \lambda &= z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1 + 2(z + 1) \\ y &= 2 + 3(z + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto il fascio richiesto ha equazione

$$\mathcal{F} : \quad \lambda(x - 2z - 3) + \mu(y - 3z - 5) = 0.$$

Il piano π deve passare per A, dunque si impone $\lambda(1-6-3)+\mu(2-9-5) = 0$; da cui $2\lambda+3\mu = 0$. Ad esempio si scelga $(\lambda, \mu) = (3, -2)$: si ottiene $\pi :\ 3(x - 2z - 3) - 2(y - 3z - 5) = 0$, cioè $\pi :\ 3x - 2y + 1 = 0$.
Per determinare σ basta osservare che il vettore ortogonale al generico piano di $\mathcal{F}$ dato da

$$\lambda x + \mu y - (2\lambda + 3\mu)z - 3\lambda - 5\mu = 0$$

cioè il vettore $(\lambda, \mu, -2\lambda - 3\mu)$ deve essere multiplo di v. Dunque dobbiamo porre:

$$\begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda = -2\lambda - 3\mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\mu.$$

Ad esempio, sia $(\lambda, \mu) = (1, -1)$. Dunque $\sigma :\ (x-2z-3)-(y-3z-5) = 0$, cioè $\sigma :\ x-y+z+2 = 0$.

Richiamiamo alcuni concetti noti che saranno utili nella risoluzione di problemi di geometria lineare e nello studio delle coniche.

5.1. Definizione. Sia $C \in \mathbb{E}^n$ un punto fissato.

a) Sia $P \in \mathbb{E}^n$ un punto qualunque. Si dice *punto simmetrico* di P rispetto a C il punto P' tale che: $P' \in r_{CP}$, $d(P', C) = d(P, C)$ e $P' \neq P$.

b) Sia $X \subset \mathbb{E}^n$ un insieme. Si dice *insieme simmetrico* di X rispetto a C l'insieme X' costituito da tutti i punti simmetrici dei punti $P \in X$.

c) Sia $X \subset \mathbb{E}^n$ un insieme. Diciamo che X è *simmetrico* rispetto a C se $X = X'$, cioè se per ogni $P \in X$ il suo punto simmetrico P' appartiene ancora a X. In tal caso C si dice *centro di simmetria* di X.

5.1.1. Esempio. In $\mathbb{E}^2$ si consideri il punto $C = (2,3)$. Vogliamo determinare il punto P' simmetrico di $P = (1,-1)$ rispetto a C e la retta r' simmetrica di $r: \ 2x - y - 3 = 0$ rispetto a C.

Si consideri la retta r_{CP} per P e C: si vede immediatamente che

$$r_{CP}: \quad (x,y) = (1,-1) + \lambda(1,4).$$

Il suo punto generico $P_\lambda = (1+\lambda, -1+4\lambda)$ deve avere distanza da C pari a $d(P,C) = \|P - C\| = \|(1,4)\| = \sqrt{17}$. Poiché $d(P_\lambda, C) = \|P_\lambda - C\| = \|(-1+\lambda, -4+4\lambda)\| = \sqrt{(-1+\lambda)^2 + (-4+4\lambda)^2}$, imponendo $d(P_\lambda, C) = d(P,C)$ si ottiene

$$\sqrt{(-1+\lambda)^2 + 16(-1+\lambda)^2} = \sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{17(-1+\lambda)^2} = \sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-1+\lambda)^2} = 1$$

da cui $|-1+\lambda| = 1$ e quindi $\lambda = 2$ oppure $\lambda = 0$. Per quest'ultimo valore si ottiene il punto P, mentre per $\lambda = 2$ si ottiene il simmetrico $P' = (3,7)$.
Per rispondere al secondo quesito, si può scrivere il generico punto di r (in funzione di un parametro h) e poi calcolarne il simmetrico come fatto per P. Tuttavia è più semplice osservare che r' è la retta che passa per P' e Q', simmetrici di due punti qualunque P e Q di r. Sia dunque P come nel testo (si noti che effettivamente $(1,-1) \in r$) e si scelga $Q = (0,-3) \in r$. Calcolando come sopra il punto Q' simmetrico di Q rispetto a C si ottiene $Q' = (4,9)$. Dunque $r' = r_{CQ'}$, il cui calcolo è immediato.

5.2. Definizione. Siano A e B due punti di $\mathbb{E}^n$. Si dice *punto medio* del segmento di estremi A e B l'unico punto della retta r_{AB} equidistante dagli estremi.

Si osservi che, se M è il punto medio di un segmento AB, allora A è il punto simmetrico di B rispetto a M (e viceversa). Inoltre i vettori $A - M$ e $M - B$ di E^n sono uguali; ne segue che

$$M = \frac{A+B}{2} \quad \textit{(uguaglianza simbolica tra le coordinate).}$$

Se si considerano tutti i punti di $\mathbb{E}^n$ equidistanti da A e B (e non solo quello appartenente alla retta r_{AB}), si può provare che tale luogo geometrico è un iperpiano che ovviamente contiene il punto medio M ed è ortogonale a r_{AB}, detto *iperpiano asse* del segmento AB.
In particolare, in $\mathbb{E}^2$ si tratta della *retta asse* del segmento AB, mentre in $\mathbb{E}^3$ si tratta del *piano asse* del segmento AB. Vediamo alcuni esempi.

5.2.1. Esempio. In $\mathbb{E}^2$ si considerino i punti $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$. Determinare il punto medio M e la retta t asse del segmento AB, verificando che $M \in t$ e che t è ortogonale a r_{AB}.

Per quanto visto
$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,2)+(3,4)}{2} = \frac{(4,6)}{2} = (2,3).$$
Per definizione la retta asse è
$$t := \{P \in \mathbb{E}^2 \mid d(P,A) = d(P,B)\}.$$
Posto $P = (x, y)$, si ha: $d(P,A)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ e $d(P,B)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$. Dunque t ha equazione
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1 - 4y + 4 = -6x + 9 - 8y + 16$$
cioè $x + y - 5 = 0$. Si verifica immediatamente che $M \in t$. Inoltre t ha direzione $(1, -1)$ e r_{AB} ha direzione $B - A = (2, 2)$ e tali vettori sono chiaramente ortogonali.

5.2.2. Esempio. In $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$ e $B = (3, 0, 1)$. Determinare il punto medio M e il piano π asse del segmento AB, verificando che $M \in \pi$ e che π è ortogonale a r_{AB}.

Come prima
$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,2,-1)+(3,0,1)}{2} = \frac{(4,2,0)}{2} = (2,1,0).$$
Il piano asse è
$$\pi := \{P \in \mathbb{E}^3 \mid d(P,A) = d(P,B)\}.$$
Posto $P = (x, y, z)$, l'uguaglianza $d(P,A) = d(P,B)$ diventa:
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = d(P,A)^2 = d(P,B)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2$$
e quindi
$$\pi:\ -2x + 1 - 4y + 4 + 2z + 1 = -6x + 9 - 2z + 1 \quad \Rightarrow \quad \pi:\ x - y + z - 1 = 0.$$
Si verifica immediatamente che $M \in \pi$. Inoltre π ha direzione ortogonale $(1, -1, 1)$ e r_{AB} ha direzione $B - A = (2, -2, 2)$ e tali vettori generano la stessa retta vettoriale..

Se volessimo generalizzare la nozione di simmetria rispetto a un punto fissato a quella di simmetria rispetto a una varietà lineare affine qualunque, incontreremmo delle difficoltà. L'unico caso semplice, oltre quello visto prima, è quello in cui tale varietà è un iperpiano. Per non eccedere in astrazione, vediamo in generale solo la definizione e poi specifichiamo le osservazioni e gli esempi nei due casi consueti: retta in $\mathbb{E}^2$ e piano in $\mathbb{E}^3$.

5.3. Definizione. Sia $H \subset \mathbb{E}^n$ un iperpiano fissato.

a) Sia $P \in \mathbb{E}^n$ un punto qualunque. Si dice *punto simmetrico* di P rispetto ad H il punto P' tale che H è l'iperpiano asse del segmento PP'.

b) Sia $X \subset \mathbb{E}^n$ un insieme. Si dice *insieme simmetrico* di X rispetto ad H l'insieme X' costituito da tutti i punti simmetrici dei punti $P \in X$.

c) Sia $X \subset \mathbb{E}^n$ un insieme. Diciamo che X è *simmetrico* rispetto ad H se $X = X'$, cioè se per ogni $P \in X$ il suo punto simmetrico P' appartiene ancora a X. In tal caso H si dice *iperpiano di simmetria* di X.

5.4. Osservazione. Si noti che, se P' è il punto simmetrico di P rispetto ad un iperpiano H, allora la retta $r_{PP'}$ è ortogonale ad H e $d(P', H) = d(P, H)$.

5.4.1. Esempio. In $\mathbb{E}^2$ un iperpiano è una retta. Vogliamo determinare il punto P' simmetrico di $P = (1, 2)$ rispetto alla retta $r: \ 2x + y - 2 = 0$.

Per fare questo, basta determinare la retta t ortogonale a r e passante per P e poi individuare il punto di t che ha distanza $d(P, r)$ da r. Ovviamente tale retta ha direzione $(2, 1)$ e quindi equazione parametrica

$$t: \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}.$$

Il punto generico di t è quindi $Q_\lambda = (1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$. Imponiamo

$$d(Q_\lambda, r) = d(P, r) \quad \Rightarrow \quad \frac{|2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|2 + 2 - 2|}{\sqrt{4 + 1}} \quad \Rightarrow \quad |5\lambda + 2| = 2$$

quindi $\lambda = 0$ (sostituendo in Q_λ si ottiene P) oppure $\lambda = -4/5$ e, sostituendo in Q_λ, si ottiene $P' = (-3/5, 6/5)$.

5.4.2. Esempio. In $\mathbb{E}^3$ un iperpiano è un piano. Vogliamo determinare il punto P' simmetrico di $P = (0, 1, -2)$ rispetto al piano $\pi: \ 2x + 4y + 4z - 5 = 0$.

Per fare questo, basta determinare la retta t ortogonale a π (dunque di direzione $(2, 4, 4)$ o meglio $(1, 2, 2)$) e passante per P e poi individuare il punto di t che ha distanza $d(P, \pi)$ da π. Quindi la retta t ha equazione parametrica

$$t: \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}.$$

Il punto generico di t è quindi $Q_\lambda = (\lambda, 1 + 2\lambda, -2 + 2\lambda)$. Imponiamo

$$d(Q_\lambda, \pi) = d(P, \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{|2\lambda + 4(1 + 2\lambda) + 4(-2 + 2\lambda) - 5|}{\sqrt{36}} = \frac{|4 - 8 - 5|}{\sqrt{36}} \quad \Rightarrow \quad |18\lambda - 9| = 9$$

quindi $\lambda = 0, 1$. Sostituendo tali valori in Q_λ si ottengono, rispettivamente, P e $P' = (1, 3, 0)$.

5.4.3. Esempio. Determinare la retta r' simmetrica di $r: \ (x, y, z) = (0, 1, -2) + \mu(1, 0, 0)$ rispetto al piano $\pi: \ 2x + 4y + 4z - 5 = 0$.

Per fare questo, basta determinare famiglia di rette t_μ ortogonali a π (di direzione $(1, 2, 2)$ come visto in 5.4.2) e passanti per $P_\mu = (\mu, 1, -2) \in r$ e poi individuare il punto di t_μ che ha distanza $d(P_\mu, \pi)$ da π. Quindi la retta t_μ ha equazione parametrica

$$t_\mu: \quad \begin{cases} x = \mu + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}.$$

Il punto generico di t_μ è quindi $Q_{\lambda,\mu} = (\mu + \lambda, 1 + 2\lambda, -2 + 2\lambda)$. Imponiamo

$$d(Q_{\lambda,\mu}, \pi) = d(P_\mu, \pi)$$

tenendo conto che dovremo ricavare un valore di λ, mentre il paramentro μ resterà come parametro della retta r' che stiamo per determinare. Calcoliamo

$$d(Q_{\lambda,\mu},\pi) = \frac{|2(\mu+\lambda)+4(1+2\lambda)+4(-2+2\lambda)-5|}{\sqrt{36}}$$

$$d(P_\mu,\pi) = \frac{|2\mu+4-8-5|}{\sqrt{36}}$$

Dall'uguaglianza $d(Q_{\lambda,\mu},\pi) = d(P_\mu,\pi)$ si ottiene:

$$|2\mu+18\lambda-9| = |2\mu-9| \quad \Rightarrow \quad 2\mu+18\lambda-9 = \pm(2\mu-9) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oppure } \lambda = -\frac{2}{9}\,\mu+1$$

Chiaramente, per $\lambda = 0$ sostituito in $Q_{\lambda,\mu}$ si ottiene P_μ. Invece per $\lambda = -\frac{2}{9}\,\mu+1$ si ottiene

$$P'_\mu = \left(\mu - \frac{2}{9}\,\mu+1, 1+2\left(-\frac{2}{9}\,\mu+1\right), -2+2\left(-\frac{2}{9}\,\mu+1\right)\right) = \left(\frac{7}{9}\,\mu+1, -\frac{4}{9}\,\mu+3, -\frac{4}{9}\,\mu\right).$$

Dunque, con un ovvio cambio di parametro:

$$r' : \ (x,y,z) = (1,3,0)+\mu(7,-4,-4).$$

5.4.4. Esempio. Provare che il sottoinsieme X di $\mathbb{E}^2$ definito da

$$X := \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid y = 5x^2\}$$

è simmetrico rispetto alla retta $r: \ x = 0$; in altre parole r è un asse di simmetria di X.

Dobbiamo dunque verificare che il simmetrico P' di ogni punto $P \in X$ appartiene ancora ad X. Sia dunque $P = (x_0, y_0) \in X$; come in 5.4.1 determiniamo il simmetrico di P rispetto a r. La retta t passante per P e ortogonale ad r può essere scritta subito in forma parametrica

$$t: \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 \end{cases}.$$

Il punto generico di t è quindi $P_\lambda = (x_0+\lambda, y_0)$ e la sua distanza da r è $|x_0+\lambda|$. D'altra parte la distanza di P da r è $|x_0|$. Quindi imponendo l'equidistanza si ottiene

$$d(P_\lambda, r) = d(P,r) \quad \Leftrightarrow \quad |x_0+\lambda| = |x_0| \quad \Leftrightarrow \quad (x_0+\lambda)^2 = x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(2x_0+\lambda) = 0$$

quindi $\lambda = 0$ (e si ottiene P) oppure $\lambda = -2x_0$ e si ottiene $P' = (-x_0, y_0)$.
Ora utilizziamo l'ipotesi $P \in X$: ciò significa che $y_0 = 5x_0^2$. Dunque anche $y_0 = 5(-x_0)^2$, ovvero $P' \in X$, come volevamo.