Capitolo X
GEOMETRIA LINEARE AFFINE

1. Spazi affini

In maniera intuitiva si può pensare ad uno spazio affine come ad uno spazio vettoriale 'senza l'origine', ovvero come ad un insieme di punti ad ognuno dei quali viene associata una copia di uno spazio vettoriale modello.

1.1. Definizione. Lo *spazio affine reale di dimensione* n, denotato $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ o semplicemente $\mathbb{A}^n$, è l'insieme $\mathbb{R}^n$ munito dell'applicazione

$$\alpha : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\alpha((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Le n-uple di $\mathbb{A}^n$ si dicono *punti*.

Si noti che il dominio di α è il prodotto cartesiano dell'**insieme** $\mathbb{R}^n$ per se stesso, mentre il codominio è lo **spazio vettoriale** $\mathbb{R}^n$. Il simbolo $\mathbb{A}^n$ si usa per differenziare la struttura di spazio affine da quella di spazio vettoriale.

In particolare, $\mathbb{A}^1$ indica la *retta affine reale*, $\mathbb{A}^2$ il *piano affine reale*, $\mathbb{A}^3$ lo *spazio affine reale*.

Esiste un concetto analogo di spazio affine complesso $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ modellato sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$.

1.2. Osservazione. Dalla definizione 1.1 si verificano facilmente le seguenti proprietà per $\mathbb{A}^n$:

(p_1) per ogni punto $P \in \mathbb{A}^n$ e per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$, esiste un unico punto Q di $\mathbb{A}^n$ tale che $\alpha(P, Q) = v$;

(p_2) per ogni terna P, Q, R di punti di $\mathbb{A}^n$, vale la relazione: $\alpha(P, Q) + \alpha(Q, R) = \alpha(P, R)$.

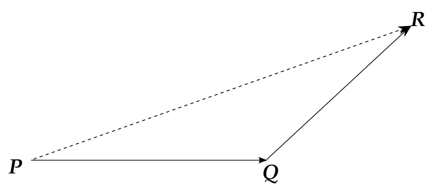

Figura 11

1.3. Notazioni. Tenuto conto della definizione di α, dati due punti $P, Q \in \mathbb{A}^n$, il vettore $v = \alpha(P, Q)$ verrà denotato semplicemente con

$$v = Q - P.$$

Inoltre, se $v = Q - P$, per la proprietà (p_1) scriveremo anche, per semplicità:

$$Q = P + v.$$

Infine, la proprietà (p_2) altri non è che la regola per sommare vettori in $\mathbb{R}^n$:

$$(Q - P) + (R - Q) = R - P.$$

1.4. Osservazione.
a) Per ogni $P \in \mathbb{A}^n$, si ha $\alpha(P,P) = 0_{\mathbb{R}^n}$: segue da (p_2) ponendo $P = Q = R$.

b) Comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}^n$, si ha $\alpha(P,Q) = -\alpha(Q,P)$: segue da (p_2) ponendo $R = P$.

In generale, negli spazi affini si può introdurre un sistema di riferimento, con la scelta di una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ e di un punto di O of $\mathbb{A}^n$. Osserviamo intanto che per la proprietà (p_1), fissato un punto O di $\mathbb{A}^n$, si ottiene un'applicazione biettiva

$$\alpha_O : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\alpha_O(Q) = \alpha(O,Q) = Q - O. \qquad (*)$$

1.5. Definizione. Fissato un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{A}^n$, diremo che il punto $P \in \mathbb{A}^n$ ha *coordinate* $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto ad $(O, \mathcal{B})$ se

$$P - O = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

In tal caso scriveremo semplicemente $P = (x_1, \dots, x_n)$.

1.6. Definizione. Il dato $(O, \mathcal{B})$ del punto $O \in \mathbb{A}^n$ e della base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *sistema di coordinate affini* o *sistema di riferimento affine* su $\mathbb{A}^n$, avente *origine* il punto O.
In particolare, se $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $(O, \mathcal{E})$ si dice *sistema di riferimento cartesiano ortogonale* di $\mathbb{A}^n$.

1.7. Osservazione. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $(O, \mathcal{E})$ di $\mathbb{A}^n$, con $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, i punti A_i, per $i = 1, \dots, n$, definiti da

$$A_i = O + e_i$$

si dicono *punti coordinati* di $\mathbb{A}^n$ e hanno ovviamente coordinate

$$A_1 = (1, 0, \dots, 0), \;\; A_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \;\; A_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Lo spazio affine $\mathbb{A}^n$, fissato l'origine in un suo punto, ha, essenzialmente, la struttura di $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale.

1.8. Definizione. Sia $w \in \mathbb{R}^n$; si dice *traslazione di* $\mathbb{A}^n$ *secondo* w l'applicazione

$$T_w : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n \quad \text{definita da} \quad T_w(P) = P + w.$$

Chiaramente T_w è una corrispondenza biunivoca di $\mathbb{A}^n$ in sé; infatti la traslazione T_{-w} è la sua applicazione inversa. Fissato un sistema di riferimento, si può esprimere in generale una traslazione attraverso le sue equazioni, come mostra il seguente

1.8.1. Esempio. Si consideri la traslazione di $\mathbb{A}^3$ secondo il vettore $w = (1, -2, 1)$ e si fissi un riferimento cartesiano ortogonale $(O, \mathcal{E})$ di $\mathbb{A}^3$. Sia $P = (x, y, z) \in \mathbb{A}^3$, dunque $P - O = xe_1 + ye_2 + ze_3$; allora il vettore

$$\begin{aligned} T_w(P) - O &= (P + w) - O = (P - O) + w = (xe_1 + ye_2 + ze_3) + (e_1 - 2e_2 + e_3) = \\ &= (x+1)e_1 + (y-2)e_2 + (z+1)e_3 \end{aligned}$$

quindi $T_w((x, y, z)) = (x + 1, y - 2, z + 1)$.

Con analogo ragionamento, è immediato determinare le equazioni di una traslazione:

1.9. Proposizione. *Sia $\mathbb{A}^n$ con riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ e sia $w = (w_1, \dots, w_n)_{\mathcal{B}}$ un vettore di $\mathbb{R}^n$. Allora la traslazione T_w ha le seguenti equazioni:*

$$T_w((x_1, \dots, x_n)) = (x_1 + w_1, \dots, x_n + w_n).$$

$\square$

1.10. Osservazione. La traslazione T_w induce un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definito da} \quad P - O \mapsto T_w(P) - T_w(O).$$

Si verifica facilmente che ϕ è l'isomorfismo "identità"; infatti, fissando il riferimento cartesiano ortogonale $(O, \mathcal{E})$ di $\mathbb{A}^n$, siano $(x_1, \dots, x_n)$ le coordinate del punto P in tale riferimento e sia $w = w_1 e_1 + \cdots + w_n e_n$. Ne segue che, da una parte, il vettore $P - O \in \mathbb{R}^n$ è dato da

$$P - O = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

e, dall'altra:

$$T_w(P) = (x_1 + w_1, \dots, x_n + w_n), \quad T_w(O) = (w_1, \dots, w_n)$$

quindi

$$\begin{aligned} T_w(P) - T_w(O) &= (T_w(P) - O) - (T_w(O) - O) = \\ &= ((x_1 + w_1)e_1 + \cdots (x_n + w_n)e_n) - (w_1 e_1 + \cdots + w_n e_n) = \\ &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = P - O. \end{aligned}$$

Ad essere più precisi, l'isomorfismo precedente è tra due copie 'distinte' dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ associate ai due punti O e $O' = T_w(O)$ di $\mathbb{A}^n$ che possono essere pensati come le origini di due sistemi di riferimento per $\mathbb{A}^n$. Ciò è illustrato dalla figura seguente:

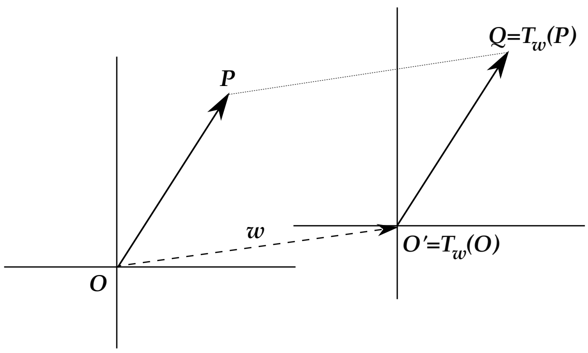

Figura 12

Partendo dalla nozione di retta vettoriale nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e dalla corrispondenza biunivoca $\alpha_O : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ove $\alpha_O(P) = P - O$, è naturale definire come "retta per l'origine" il sottoinsieme di $\mathbb{A}^2$ che corrisponde ad una retta vettoriale $\mathcal{L}(v)$ di $\mathbb{R}^2$.

Si consideri, ad esempio, la retta vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generata da $v = (1, 2)$. Allora la corrispondente retta per l'origine di $\mathbb{A}^2$ è

$$\{P \in \mathbb{A}^2 \mid (P - O) \in \mathcal{L}(v)\} = \{(x, y) = \lambda(1, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

In generale diamo dunque la seguente

2.1. Definizione. Nello spazio affine $\mathbb{A}^n$, si dice *retta per l'origine* un sottoinsieme del tipo

$$r_O = \{P \in \mathbb{A}^n \mid (P - O) \in \mathcal{L}(v)\}, \quad \text{per qualche } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Usando l'identificazione tra $\mathbb{A}^n$ ed $\mathbb{R}^n$ espressa dalla corrispondenza in (*), dalla definizione si ha anche che

$$r_O = \{P \in \mathbb{A}^n \mid P = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

o, in breve

$$r_O :\ P = \lambda v\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e tale scrittura verrà detta *equazione vettoriale* di r_O. Il vettore v si dice *direzione* di r_O.

Fissando un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{A}^n$ e tenendo conto dell'identificazione tra le coordinate di un punto P e le componenti del vettore $P - O$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, quest' ultima equazione si scriverà anche come

$$r_O :\ (x_1, \ldots, x_n) = \lambda(v_1, \ldots, v_n)\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ove $v = (v_1, \ldots, v_n)$ è il vettore direzione della retta.

2.2. Osservazione. Come insiemi, la retta per l'origine r_O e la retta vettoriale $\mathcal{L}(v)$ coincidono, anche se vengono visti in due ambienti diversi: $r_O \subset \mathbb{A}^n$ mentre $\mathcal{L}(v) \subset \mathbb{R}^n$. Chiarita questa distinzione, i due insiemi verranno talvolta identificati.

2.2.1. Esempio. La retta r_O di $\mathbb{A}^3$ avente direzione $v = (1, 2, 3)$ ha equazione vettoriale

$$r_O :\ (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3).$$

2.2.2. Esempio. In $\mathbb{A}^2$ con un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si consideri l'insieme r definito da

$$r = \{(x, y) = (1, 2) + \lambda(0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Geometricamente, è chiaro che r è una "retta"; è infatti la retta parallela all'asse delle ordinate e di ascissa $x = 1$. D'altra parte, operando la traslazione T_u, con $u = (-1, -2)$, si ottiene l'insieme

$$T_u(r) = \{P + u,\ P \in r\} = \{(x, y) = \lambda(0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

che è chiaramente una retta per l'origine (geometricamente l'asse delle ascisse $x = 0$). Se indichiamo con r_O la retta per l'origine $T_u(r)$, è chiaro che $r = T_w(r_O)$, dove $w = -u$.

In generale diamo dunque la seguente

2.3. Definizione. Un insieme $r \subset \mathbb{A}^n$ si dice *retta* se esistono una traslazione T_w di $\mathbb{A}^n$ e una retta r_O per l'origine tali che $r = T_w(r_O)$.

Poiché, come insiemi, la retta r_O coincide con una retta vettoriale $\mathcal{L}(v)$ di $\mathbb{R}^n$ (vedi Osservazione 2.2), diremo che $\mathcal{L}(v)$ è la *giacitura* di r e la indicheremo con S_r (dove "S" ricorda che S_r è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$). Si noti che per una retta r, $\dim(S_r) = 1$.

Dalle equazioni viste prima per una retta per l'origine, si hanno immediatamente le seguenti equazioni per una retta qualunque. Consideriamo la retta per l'origine

$$r_O : \; P = \lambda v \; , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e la traslazione T_w, con $w \in \mathbb{R}^n$. Se $w = Q - O$, allora la retta $r = T_w(r_O)$ è:

$$r = \{P \in \mathbb{A}^n \mid P = T_w(P_O), \; P_O \in r_O\} = \{P \in \mathbb{A}^n \mid P = Q + \lambda v, \; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

In breve scriveremo

$$r : \; P = Q + \lambda v. \tag{1}$$

Fissato un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$ in cui $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)_{\mathcal{B}}$, l'equazione precedente diventa:

$$r : \quad (x_1, \ldots, x_n) = (q_1, \ldots, q_n) + \lambda(v_1, \ldots, v_n), \tag{1'}$$

oppure:

$$r : \quad \begin{cases} x_1 & = & q_1 + \lambda v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & q_n + \lambda v_n \end{cases} . \tag{2}$$

2.4. Definizione. L'equazione (1) (o anche (1′)) si dice *equazione vettoriale* della retta r, mentre l'equazione (2) si dice *equazione parametrica* di r (espressa mediante un *parametro* reale λ).

2.5. Osservazione.

a) Nell'equazione vettoriale di una retta $r : \; P = Q + \lambda v$, per ogni valore di λ si ottiene un punto di r (e viceversa). Per $\lambda = 0$ si ottiene ovviamente il punto Q.

b) Il punto Q non è unico, in quanto individuato da una traslazione T_w (che manda r in una retta r_O passante per l'origine) e tale traslazione non è ovviamente unica. Più precisamente ci sono infinite traslazioni tali che $T_w(r) = r_O$; si può vedere che tali traslazioni T_w sono tutte e sole quelle per cui $w = w' + v'$, con $v' \in \mathcal{L}(v)$ e $T_{w'}$ è una particolare traslazione (vedi Figura 13), ovvero tali che $w - w' \in \mathcal{L}(v)$.

c) Inoltre è chiaro che il vettore v, essendo una base di $\mathcal{L}(v)$, non è unico. Tuttavia è unica la giacitura $S_r = \mathcal{L}(v)$

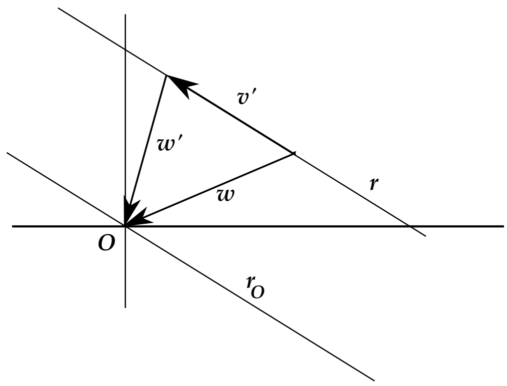

Figura 13

2.5.1. Esempio. Vogliamo verificare che le seguenti rette coincidono:

$$r: \quad (x,y) = (1,2) + \lambda(1,-1), \qquad r': \quad (x,y) = (2,1) + \mu(1,-1).$$

Si osservi dapprima che le due rette hanno la stessa giacitura: $S_r = S_{r'} = \mathcal{L}((1,-1)) = r_O$; in particolare, posti $Q = (1,2) \in r$ e $Q' = (2,1) \in r'$:

$$\begin{array}{l} r = T_w(r_O), \text{ con } w = Q - O = (1,2) \\ r' = T_{w'}(r_O), \text{ con } w' = Q' - O = (2,1) \end{array}.$$

Si conclude con 2.5 b), notando che $w - w' = (-1,1)$ è un vettore del sottospazio $\mathcal{L}((1,-1))$.

Analogamente alla nozione di retta si può introdurre la nozione di piano di $\mathbb{A}^n$.

2.6. Definizione. Nello spazio affine $\mathbb{A}^n$ si dice *piano per l'origine* ogni sottoinsieme del tipo

$$\pi_O = \{P \in \mathbb{A}^n \mid (P - O) \in \mathcal{L}(u,v)\}, \quad \text{con } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ linearmente indipendenti.}$$

Con l'usuale identificazione tra un punto $P \in \mathbb{A}^n$ e la sua immagine $\alpha(P) \in \mathbb{R}^n$ come nella corrispondenza (*), si può anche scrivere che

$$\pi_O = \{P \in \mathbb{A}^n \mid P = \lambda u + \mu v, \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

oppure, in breve

$$\pi_O: \; P = \lambda u + \mu v$$

dove λ, μ sono ora due parametri reali.

2.7. Definizione. Un insieme $\pi \subset \mathbb{A}^n$ si dice *piano* se esistono una traslazione T_w di $\mathbb{A}^n$ e un piano π_O per l'origine tali che $\pi = T_w(\pi_O)$.
Poiché come insieme il piano π_O coincide con un piano vettoriale $\mathcal{L}(u,v)$ di $\mathbb{R}^n$, diremo che $\mathcal{L}(u,v)$ è la *giacitura* di π e la indicheremo con S_π. Si noti che per un piano π, $\dim(S_\pi) = 2$.

Se $Q = T_w(O)$, ovvero $w = Q - O$, allora i punti del piano π sono caratterizzati da

$$\pi: \quad P = Q + \lambda u + \mu v. \tag{3}$$

Sia ora $(O, \mathcal{B})$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^n$. Se $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n)_\mathcal{B}$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)_\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$, l'equazione precedente diventa:

$$\pi: \quad \begin{cases} x_1 & = & q_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & q_n + \lambda u_v + \mu v_n \end{cases}. \tag{4}$$

2.8. Definizione. L'equazione (3) si dice *equazione vettoriale* del piano π, mentre l'equazione (4) si dice *equazione parametrica* di π.

2.8.1. Esempio. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, -1, 0)$, il piano π_O per l'origine da essi individuato è costituito dal luogo dei punti $P \in \mathbb{A}^3$ tali che

$$P = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

o anche, fissato un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$, l'insieme dei punti $P = (x, y, z)$ tali che

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, -1, 0), \quad \text{cioè} \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ z = \lambda_1 \end{cases}.$$

2.8.2. Esempio. Data la traslazione di $\mathbb{A}^3$ associata al vettore $w = (1, -1, 2)$, il piano π_O di 2.8.1 dà luogo al piano $\pi = T_w(\pi_O)$ la cui equazione è:

$$\pi: \quad P = Q + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

dove $Q = T_w(O) = (1, -1, 2)$. Esplicitamente:

$$\pi: \quad (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, -1, 0).$$

2.8.3. Esempio. Determinare le equazioni vettoriale e parametrica del piano $\pi \subset \mathbb{A}^4$ di giacitura $S_\pi = \mathcal{L}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^4$ e passante per il punto $Q \in \mathbb{A}^4$, dove

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0, -1), \quad Q = (2, 1, 1, 2).$$

Tale piano ha equazione vettoriale:

$$\pi: \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 2) + \lambda_1(1, 0, 1, 0) + \lambda_2(2, 1, 0, -1)$$

e quindi equazione parametrica

$$\pi: \quad \begin{cases} x_1 = 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 = 1 + \lambda_2 \\ x_3 = 1 + \lambda_1 \\ x_4 = 2 - \lambda_2 \end{cases}.$$

Vale l'analogo dell'osservazione 2.5 fatta per le rette:

2.9. Osservazione. L'equazione vettoriale di un piano non è unica; precisamente, se

$$\pi : \; P = Q + \lambda u + \mu v \quad \text{e} \quad \pi' : \; P = Q' + \lambda u' + \mu v'$$

sono due piani in $\mathbb{A}^n$, allora

$$\pi = \pi' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} S_\pi = S_{\pi'} \qquad (\text{cioè } \mathcal{L}(u,v) = \mathcal{L}(u',v')) \\ Q - Q' \in S_\pi \end{cases}$$

2.10. Proposizione. *Dati due punti distinti A e B in $\mathbb{A}^n$ (con $n \geq 2$), esiste una ed una sola retta passante per A e per B ed una sua equazione vettoriale è data da:*

$$r_{AB} : \; P = A + \lambda(B - A).$$

<u>Dimostrazione</u>.
Esistenza. L'equazione precedente rappresenta una retta, in quanto $B - A$ è un vettore non nullo poiché A e B sono distinti per ipotesi. Inoltre la retta r_{AB} passa per A (che si ottiene per $\lambda = 0$) e per B (che si ottiene per $\lambda = 1$).

Unicità. Se r è un'altra retta per A, la sua equazione sarà del tipo $P = A + \mu v$. Inoltre r passa per B se e solo se $B = A + \mu_0 v$, per un opportuno μ_0, quindi se e solo se $B - A = \mu_0 v$. Dunque $S_r = \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(B - A) = S_{r_{AB}}$, da cui la tesi. □

2.10.1. Esempio. La retta di $\mathbb{A}^2$ passante per i punti $A = (1,2)$ e $B = (1,-2)$ ha equazione:

$$(x, y) = (1, 2) + \lambda(0, -4).$$

2.10.2. Esempio. Determiniamo la retta di $\mathbb{A}^3$ passante per i punti $A = (1,1,1)$ e $B = (1,2,-2)$ e proviamo che il punto $P = (1,0,4)$ vi appartiene.
Sempre per 2.10 la retta richiesta è:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, -3).$$

Per concludere, basta determinare un λ che verifichi il sistema

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 1 + \lambda \\ 4 = 1 - 3\lambda \end{cases}.$$

Ovviamente $\lambda = -1$ è soluzione.

Vale l'analogo di 2.10 per 3 punti nello spazio affine. Più precisamente:

2.11. Proposizione. *Dati 3 punti distinti e non allineati A, B, C in $\mathbb{A}^n$ (con $n \geq 3$), esiste uno ed un solo piano che li contiene ed una sua equazione vettoriale è data da*

$$\pi_{ABC} : \quad P = A + \lambda(B - A) + \mu(C - A).$$

Dimostrazione.
Esistenza. L'equazione precedente rappresenta un piano, in quanto $B - A$ e $C - A$ sono vettori linearmente indipendenti poiché A, B, C non sono allineati per ipotesi. Inoltre il piano π_{ABC} passa per A (che si ottiene per $\lambda = 0$ e $\mu = 0$), per B (che si ottiene per $\lambda = 1$ e $\mu = 0$) e per C (che si ottiene per $\lambda = 0$ e $\mu = 1$).

Unicità. Sia π' un altro piano per A, B, C. Allora avrà equazione del tipo

$$\pi' : \; P = A + \lambda u + \mu v.$$

Per 2.9 è sufficiente mostrare che $\mathcal{L}(B - A, C - A) = \mathcal{L}(u, v)$; anzi basta una sola inclusione essendo entrambi sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^n$. Ma $A, B \in \pi'$, dunque (sempre per 2.9) $B - A \in S_{\pi'} = \mathcal{L}(u, v)$ e, analogamente, $C - A \in S_{\pi'} = \mathcal{L}(u, v)$. Pertanto si ha l'inclusione $\mathcal{L}(B - A, C - A) \subseteq \mathcal{L}(u, v)$, come volevamo. $\square$

2.11.1. Esempio. Determiniamo il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$ per i tre punti $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 1, -1)$.
Bisogna dapprima verificare che i tre punti non sono allineati, ad esempio osservando che i vettori $B - A = (0, -1, 1)$ e $C - A = (-1, -1, -1)$ non sono paralleli. Dunque per 2.11 il piano richiesto è:

$$\pi : \quad (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(0, -1, 1) + \mu(-1, -1, -1).$$

3. Varietà lineari affini generali. parallelismo

Un'immediata generalizzazione delle nozioni di retta e di piano porta alla nozione di "varietà lineare affine" L in $\mathbb{A}^n$: le rispettive giaciture per una retta o un piano sono sottospazi di dimensione 1 o 2 di $\mathbb{R}^n$. In generale, si può considerare un sottospazio V di dimensione qualunque in $\mathbb{R}^n$.

3.1. Definizione. Una *varietà lineare affine* di *dimensione* k di $\mathbb{A}^n$ è un insieme

$$L = \{P \in \mathbb{A}^n \mid (P - Q) \in V\}$$

dove $Q \in \mathbb{A}^n$ è un particolare punto dello spazio affine e $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di dimensione k. Tale sottospazio V si dirà *giacitura* di L e si indicherà con S_L. Se $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ allora una *equazione vettoriale* di L è data da:

$$L : \; P = Q + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

3.2. Osservazione. Una retta è una varietà lineare affine di dimensione 1, mentre un piano è una varietà lineare affine di dimensione 2.

3.3. Definizione. Si dice *iperpiano* di $\mathbb{A}^n$ una varietà lineare affine di dimensione $n - 1$.

In particolare, una retta in $\mathbb{A}^2$ ed un piano in $\mathbb{A}^3$ sono esempi di iperpiani.

Non tratteremo ulteriormente varietà lineare affini generali (se non utilizzando questo termine per riassumere nozioni e proprietà che valgono sia per rette che per piani), limitandoci a dare solo un esempio:

3.3.1. Esempio. Vogliamo determinare le equazioni vettoriale e parametrica della varietà lineare affine (un iperpiano) in $\mathbb{A}^4$ associata al sottospazio $S = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^4$ secondo il vettore $w \in \mathbb{R}^4$, dove $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (2, 1, 0, -1), v_3 = (0, 0, -1, 1)$ e $w = (2, 1, 1, 2)$. Tale varietà lineare L ha le seguenti equazioni, vettoriale e parametrica rispettivamente:

$$L: \ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 2) + \lambda_1(1, 0, 1, 0) + \lambda_2(2, 1, 0, -1) + \lambda_3(0, 0, -1, 1)$$

$$L: \quad \begin{cases} x_1 = 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 = 1 + \lambda_2 \\ x_3 = 1 + \lambda_1 - \lambda_3 \\ x_4 = 2 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} .$$

3.4. Definizione. Siano $L, L' \subseteq \mathbb{A}^n$ due varietà lineare affini della stessa dimensione. Diremo che L ed L' sono *parallele* se hanno la stessa giacitura, cioè se $S_L = S_{L'}$.

3.4.1. Esempio. Sia $L_O \subset \mathbb{A}^2$ una retta passante per l'origine; le rette L parallele a L_O sono tutte e sole le rette del piano del tipo $T_w(L_O)$, con w variabile in $\mathbb{R}^2$. Si osservi infine che, per 3.15, $L = L_O$ se e solo $w \in S_L$.
Sia, ad esempio, $L_O : \ (x, y) = \lambda(3, -2)$. Allora tutte e sole le rette parallele ad L_O sono del tipo:

$$L: \quad (x, y) = (\alpha, \beta) + \lambda(3, -2),$$

con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre una tale retta L è distinta da L_O se e solo se $(\alpha, \beta) \notin S_L$, cioè se (α, β) non è un multiplo di $(3, -2)$.

Tale nozione non è utilizzabile per due varietà lineari di dimensione diversa; diamo dunque una definizione apposita in un caso particolare:

3.5. Definizione. Una retta r ed un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}^n$ si dicono *paralleli* se la giacitura della prima è inclusa nella giacitura del secondo, cioè se $S_r \subset S_\pi$.

3.5.1. Esempio. Vogliamo vedere a quali, tra le rette r_1, r_2, r_3, è parallelo o meno il piano π, dove:

$$\begin{aligned} \pi: &\quad (x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) \\ r_1: &\quad (x, y, z) = \lambda(1, -1, 0) \\ r_2: &\quad (x, y, z) = (0, 3, 0) + \lambda(1, 1, 2) \\ r_3: &\quad (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Indichiamo con w_1 e w_2 due vettori che sono una base per la giacitura S_π del piano π e con v_i, per $i = 1, 2, 3$, un vettore che genera la giacitura S_{r_i} di ogni retta r_i; ad esempio: $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1)$, $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.
Per verificare se S_{r_i} è contenuta o meno in S_π, basta calcolare il rango della matrice le cui righe sono, rispettivamente, date dalle componenti di w_1, w_2, v_i.

Nel primo caso la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, dunque $v_1 \in \mathcal{L}(w_1, w_2)$, quindi $S_{r_1} \subset S_\pi$, cioè r_1 è parallela a π. Inoltre $r_1 \not\subset \pi$, in quanto $(0,0,0) \in r_1$ ma $(0,0,0) \notin \pi$. Infatti, dovrebbero esistere λ_1 e λ_2 tali che

$$(0,0,0) = (0,2,-1) + \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \lambda_1 \\ 0 = 2 + \lambda_2 \\ 0 = -1 + \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

e tale sistema non ha ovviamente soluzioni.
Nel secondo caso, la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha ancora rango 2, dunque $v_2 \in \mathcal{L}(w_1, w_2)$, quindi r_2 è parallela a π. Tuttavia $r_2 \subset \pi$ in quanto il seguente sistema (ottenuto uguagliando le coordinate dei punti generici di r_2 e di π)

$$\begin{cases} \lambda & = & \lambda_1 \\ \lambda + 3 & = & 2 + \lambda_2 \\ 2\lambda & = & -1 + \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & \lambda \\ \lambda_2 & = & \lambda + 1 \\ 2\lambda & = & -1 + \lambda + \lambda + 1 \end{cases}$$

ha soluzioni (λ_1, λ_2) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nel terzo caso, la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, dunque r_3 non è parallela a π.

3.6. Definizione. Siano $L, L' \subseteq \mathbb{A}^n$ due varietà lineare affini distinte. Diciamo che L ed L' sono *incidenti* se la loro intersezione è non vuota; si dicono, invece, *sghembe* se non sono né incidenti né parallele.

3.7. Osservazione. In particolare due rette oppure una retta ed un piano sono incidenti se hanno un punto in comune; due piani in $\mathbb{A}^n$ (con $n \geq 3$) sono incidenti se hanno una retta in comune.

3.7.1. Esempio. Si considerino, nello spazio $\mathbb{A}^3$, la retta r_3 ed il π dell'esempio 3.5.1. Come abbiamo visto non sono paralleli, dunque la loro intersezione è fatta dai punti le cui coordinate sono le soluzioni del sistema ottenuto uguagliando le coordinate del generico punto di r_3 e del generico punto di π:

$$\begin{cases} 1 + \lambda & = & \lambda_1 \\ -1 + \lambda & = & 2 + \lambda_2 \\ 1 + \lambda & = & -1 + \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & 5 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda & = & 4 \end{cases}$$

che corrisponde al punto $(5,3,5) = r_3 \cap \pi$.

3.7.2. Esempio. Determiniamo la posizione reciproca delle rette r_1 ed r_2 dell'esempio 3.5.1: chiaramente non sono parallele, in quanto $v_1 \notin \mathcal{L}(v_2)$; inoltre non sono neanche incidenti in quanto il sistema (ottenuto uguagliando il generico punto $\lambda(1,-1,0)$ di r_1 col generico punto $(0,3,0) + \mu(1,1,2)$ di r_2):

$$\begin{cases} \lambda &= \mu \\ -\lambda &= 3+\mu \\ 0 &= 2\mu \end{cases}$$

non ha soluzioni. Pertanto r_1 ed r_2 sono sghembe.

Concludiamo con il seguente esercizio.

3.7.3. Esempio. Si considerino i due piani dello spazio $\mathbb{A}^3$

$$\begin{array}{ll} \pi: & (x,y,z) = (0,2,-1) + \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,1) \\ \pi': & (x,y,z) = (1,-1,1) + \lambda_1(0,0,1) + \lambda_2(2,1,-1) \end{array}.$$

Determinare tutte le rette di $\mathbb{A}^3$ parallele ad entrambi i piani.

Sia r una delle rette richieste; dunque la sua giacitura deve essere contenuta sia in quella di π che in quella di π'. Cioè

$$S_r \subseteq S_\pi \cap S_{\pi'}.$$

Poiché $S_\pi = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,1))$ e $S_{\pi'} = \mathcal{L}((0,0,1),(2,1,-1))$, si calcola $S_\pi \cap S_{\pi'}$ ponendo

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = \alpha'(0,0,1) + \beta'(2,1,-1)$$

e cercando le soluzioni $(\alpha,\beta,-\alpha',-\beta')$ del sistema lineare omogeneo $\Sigma: \ AX = 0$, dove A è la matrice che ha per colonne i 4 vettori e X la colonna delle incognite, cioè:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad X := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente lo spazio delle soluzioni di tale sistema lineare omogeneo

$$S_\Sigma = \{(\alpha,\beta,-\alpha',-\beta') = t(2,1,-4,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque $S_\pi \cap S_{\pi'}$ è la retta vettoriale generata da

$$2(1,0,1) + (0,1,1) = 4(0,0,1) + (2,1,-1) = (2,1,3).$$

Pertanto le rette r richieste sono del tipo

$$r: \quad (x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(2,1,3).$$

4. Varietà Lineari affini in forma cartesiana

Abbiamo visto come una V.L.A. si possa definire mediante un'equazione vettoriale o un'equazione parametrica. Utilizzando la teoria dei sistemi lineari, vedremo adesso come si possa associare ad una V.L.A. un'equazione senza parametri.

4.1. Proposizione. *Una varietà lineare affine $L \subseteq \mathbb{A}^n$ è data come spazio delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n, ovvero*

$$L : AX = B, \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}. \tag{$*$}$$

Inoltre, l'associato sistema lineare omogeneo determina la giacitura S_L di L, ovvero

$$S_L : AX = 0.$$

□

Chiameremo un sistema del tipo $(*)$ l'*equazione cartesiana* di L. Risolvendo il sistema, ovvero determinando la generica soluzione in funzione di $r = n - \rho(A)$ parametri si ottiene la sua espressione parametrica. Viceversa, eliminando sistematicamente i parametri si ottiene l'espressione cartesiana.

In sintesi, la varietà lineare L può essere rappresentata in forma cartesiana o in forma paramentrica e il legame tra i due tipi di equazioni è

$$\begin{array}{c} \text{sistema lineare } \Sigma : AX = B \\ (\textit{equazione cartesiana}) \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{spazio delle soluzioni } S_\Sigma \\ (\textit{equazione parametrica}) \end{array}$$

Si noti che una V.L.A. non determina in modo univoco un'equazione cartesiana: un qualunque sistema lineare equivalente a $(*)$ (ovvero avente lo stesso spazio di soluzioni) descrive la stessa V.L.A.. Un'analoga affermazione vale per la corrispondente giacitura.

Proviamo l'equivalenza delle due nozioni con una serie di esempi.

4.1.1. Esempio. Si consideri la retta $r \subset \mathbb{A}^2$ di equazione parametrica

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}.$$

Eliminiamo il parametro λ, cioè, ad esempio, ricaviamo λ dalla seconda equazione, ottenendo $\lambda = 2 - y$, e sostituiamo tale espressione nella prima equazione:

$$x = 1 + (2 - y) \quad \Rightarrow \quad x + y - 3 = 0.$$

Posto s il luogo dei punti che soddisfano tale equazione, proviamo che s coincide con r. Chiaramente $r \subseteq s$ in quanto il generico punto $(1 + \lambda, 2 - \lambda) \in r$ verifica l'equazione di s:

$$(1 + \lambda) + (2 - \lambda) - 3 \equiv 0.$$

Viceversa, proviamo che $s \subseteq r$; infatti se $P = (\alpha, \beta) \in s$, allora

$$\alpha + \beta - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha - 1) = -(\beta - 2).$$

Posto $t = (\alpha - 1) = -(\beta - 2)$, si ha $\alpha = 1 + t, \beta = 2 - t$. Pertanto P è il punto di r ottenuto per $\lambda = t$. Abbiamo dunque provato che l'equazione $x + y - 3 = 0$ rappresenta la retta r.

In generale abbiamo la seguente:

4.2. Proposizione. *Le rette del piano sono tutti e i soli i luoghi di punti le cui coordinate verificano una equazione del tipo*

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$. Se una retta r di $\mathbb{A}^2$ ha equazione (1) la sua giacitura è data da

$$S_r : \quad ax + by = 0 \ , \qquad \textit{cioè} \qquad S_r = \mathcal{L}((-b, a)).$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che, data una retta di $\mathbb{A}^2$ in equazione parametrica, si ottiene un'equazione di tipo (1) eliminando il paramentro. Dunque basta mostrare che la (1) rappresenta una retta del piano secondo la definizione 2.4. Siano dunque $a, b, c \in \mathbb{R}$, dove $(a, b) \neq (0, 0)$, e

$$s := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Primo caso: $a \neq 0$. Proviamo che gli insiemi s e r coincidono, dove r è la retta

$$r : \ (x, y) = \left(-\frac{c}{a}, 0\right) + \lambda(-b, a).$$

Si osserva immediatamente che $r \subseteq s$, sostituendo le coordinate $\left(-\frac{c}{a} - \lambda b, \lambda a\right)$ del generico punto di r nell'equazione di s.
Per provare l'altra inclusione $s \subseteq r$, si consideri un qualunque punto $P = (x_0, y_0)$ di s; dunque vale $ax_0 + by_0 + c = 0$. Poiché $a \neq 0$, si ricava che $x_0 = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a} y_0$, quindi

$$P = \left(-\frac{c}{a} - \frac{y_0}{a}\, b, y_0\right) = \left(-\frac{c}{a} - \lambda\, b, \lambda\, a\right) \in r$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene ponendo $\lambda = \frac{y_0}{a}$.
Secondo caso: $a = 0$. Analogo: si prova che gli insiemi s e r' coincidono, dove r' è la retta

$$r' : \ (x, y) = \left(0, -\frac{c}{b}\right) + \lambda(1, 0).$$

$\square$

L'equazione $ax + by + c = 0$ viene quindi detta *equazione cartesiana di una retta in* $\mathbb{A}^2$.

4.3. Osservazione. Si noti che una retta non individua univocamente un'equazione cartesiana. Infatti, se $ax + by + c = 0$ è un'equazione di r, allora ogni equazione

$$\rho ax + \rho by + \rho c = 0 \quad , \quad \rho \neq 0$$

rappresenta ancora la medesima retta r, poiché

$$\rho ax + \rho by + \rho c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(ax + by + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue da $\rho \neq 0$.

4.3.1. Esempio. La retta $r : \ 2x - y + 3 = 0$ ha giacitura $S_r : \ 2x - y = 0$, cioè $S_r = \mathcal{L}((1, 2))$.

Si consideri ora il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$ di equazione parametrica

$$\pi : \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = \mu \end{cases} .$$

Eliminiamo il parametro μ, ricavandolo dalla terza equazione e sostituendolo nelle prime due:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + z \\ y = 2 - \lambda - z \\ \mu = z \end{cases} .$$

Successivamente si elimina il parametro λ ricavandolo, ad esempio, dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + z \\ \lambda = 2 - y - z \\ \mu = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + 2(2 - y - z) + z \quad \Rightarrow \quad x + 2y + z - 5 = 0.$$

Quest'ultima equazione rappresenta ancora il piano π: infatti ogni punto di π soddisfa tale equazione, come si verifica immediatamente, sostituendo in essa le coordinate di un punto $P = (1 + 2\lambda + \mu, 2 - \lambda - \mu, \mu) \in \pi$. D'altra parte $x + 2y + z - 5 = 0$ è un sistema lineare di un'equazione in tre incognite, avente ∞^2 soluzioni, che sono dunque date dai punti di π.

Il procedimento visto sopra vale in generale, per ogni piano dello spazio affine. In modo analogo a quanto visto per le rette del piano si prova la seguente:

4.4. Proposizione. *I piani dello spazio affine sono tutti e soli i luoghi di punti le cui coordinate verificano un'equazione del tipo*

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Tale espressione è detta equazione cartesiana di piano in $\mathbb{A}^3$. Inoltre se il piano π di $\mathbb{A}^3$ ha equazione (2), allora la sua giacitura è descritto dal sistema omogeneo corrispondente:

$$S_\pi : \quad ax + by + cz = 0.$$

□

4.5. Osservazione. Nello stesso modo di 4.3 per una rette nel piano, l'equazione cartesiana di un piano nello spazio non è univocamente determinata: moltiplicando per un qualunque numero reale non nullo si ottiene un'equazione cartesiana che descrive lo stesso piano.

Il prossimo caso interessante è quello di una retta nello spazio: sia $r \subset \mathbb{A}^3$ di equazione parametrica

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} .$$

Eliminando, nel modo usuale, il parametro λ si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ \lambda = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 2 - z \\ \lambda = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Lo spazio delle soluzioni dell'ultimo sistema lineare coincide con r; infatti ogni punto di r soddisfa tale sistema (come si verifica per sostituzione). D'altra parte, il sistema in questione ha ∞^1 soluzioni (essendo di rango 2 in 3 incognite); quindi le sue soluzioni rappresentano tutti e soli i punti di r.

In generale, in modo analogo a quanto fatto in 4.2 e 4.4, si ha la seguente

4.6. Proposizione. *Le rette dello spazio affine sono tutti e soli i luoghi di punti le cui coordinate verificano un'equazione del tipo*

$$r: \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

dove $\rho \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$. *Tale equazione di dice equazione cartesiana della retta* r. $\square$

4.7. Osservazione. La giacitura S_r della retta r in (3) è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$S_r: \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

che è chiaramente il sistema omogeneo associato a (3). Vale anche il viceversa, cioè tutti e sole le rette in $\mathbb{A}^3$ di giacitura S_r hanno un'equazione di tipo (3).

4.8. Osservazione. Ancora una volta la precedente equazione non è univocamente determinata. Infatti ogni sistema lineare equivalente a (3), cioè avente lo stesso spazio delle soluzioni, fornisce una ulteriore equazione cartesiana di r.

Vediamo ulteriori esempi di eliminazione di parametri: uno in dimensione più alta (iperpiano di $\mathbb{A}^4$), un piano di $\mathbb{A}^3$, una retta di $\mathbb{A}^4$.

4.8.1. Esempio. Si consideri l'iperpiano $H \subset \mathbb{A}^4$ di equazione parametrica

$$H: \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu + \nu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \mu + \nu \\ t = \nu \end{cases}.$$

Eliminiamo i parametri: dapprima ν (dalla quarta equazione) e successivamente μ (dalla terza):

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu + t \\ y = \lambda - \mu \\ z = \mu + t \\ \nu = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda + (z - t) + t \\ y = \lambda - (z - t) \\ \mu = z - t \\ \nu = t \end{cases}$$

infine, eliminiamo λ (dalla seconda), ottenendo:

$$\begin{cases} x = 1 + (y + z - t) + (z - t) + t \\ \lambda = y + z - t \\ \mu = z - t \\ \nu = t \end{cases}.$$

Pertanto la prima equazione del precedente sistema fornisce l'*equazione cartesiana* di H:

$$H: \quad x - y - 2z + t - 1 = 0.$$

4.8.2. Esempio. Si consideri il piano L dello spazio affine reale

$$L: \quad P = Q + \lambda v_1 + \mu v_2,$$

dove $Q = (2,3,0)$, $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,-1,0)$. Esplicitando le componenti di $P = (x,y,z)$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 \qquad - \mu \\ z = \qquad \lambda \end{cases}$$

ed eliminando i parametri si ottiene

$$\begin{cases} \lambda = z \\ \mu = 3 - y \\ x = 2 + z + 3 - y \end{cases}$$

da cui l'equazione cartesiana di L: $x + y - z - 5 = 0$.

4.8.3. Esempio. Si consideri la retta $r : P = Q + \lambda v$ dello spazio $\mathbb{A}^4$, dove $Q = (1,-1,2,1)$ e $v = (1,2,2,1)$. Dunque

$$r: \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = 2 - \lambda \\ x_3 = 2 + 2\lambda \\ x_4 = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x_1 - 1 \\ x_2 = 2 - (x_1 - 1) \\ x_3 = 2 + 2(x_1 - 1) \\ x_4 = 1 + (x_1 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

4.8.4. Esempio. Si consideri il piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3$ di equazione:

$$\pi: \ 2x - y + z - 1 = 0.$$

Scegliendo come incognite libere x e y, si ha $z = -2x + y + 1$, cioè $(x,y,z) \in \pi$ se e solo se

$$(x,y,z) = (a, b, -2a + b + 1) = (0,0,1) + a(1,0,-2) + b(0,1,1)$$

che è pertanto l'equazione vettoriale di π.

4.8.5. Esempio. Si consideri la retta $r \subseteq \mathbb{A}^3$ di equazione cartesiana:

$$r: \quad \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Per determinare una sua equazione vettoriale si risolve il precedente sistema, ottenendo:

$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ z = -3x - 3 \end{cases}$$

e dunque

$$(x,y,z) = (a, -2a - 2, -3a - 3) = (0,-2,-3) + a(1,-2,-3).$$

5. Intersezioni

In questo paragrafo studieremo l'intersezione (o meglio la posizione reciproca) di varietà lineari affini. Consideriamo alcuni casi particolari.

5.1. *Intersezione di due rette nel piano.*
Siano r ed r' due rette di equazioni cartesiane

$$r: \quad ax+by+c=0, \qquad r': \quad a'x+b'y+c'=0.$$

La loro intersezione è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax & + & by & = & -c \\ a'x & + & b'y & = & -c' \end{cases}.$$

Dette

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A,B)=\begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix}$$

le matrici associate a tale sistema, tre casi sono possibili:

- $\rho(A)=\rho(A,B)=1$: il sistema ha ∞^1 soluzioni, dunque $r=r'$;
- $\rho(A)=\rho(A,B)=2$: il sistema ha una sola soluzione (x_0,y_0), dunque r interseca r' nel punto di coordinate (x_0,y_0);
- $\rho(A)=1$ e $\rho(A,B)=2$: il sistema non ha soluzioni, pertanto $r\cap r'=\emptyset$. In tal caso si tratta di due rette parallele e distinte di giacitura $\mathcal{L}((-b,a))$.

In sintesi, si ha la tabella:

$\rho(A)$	$\rho(A,B)$	sol. del sistema $AX=B$	$r\cap r'$
1	1	∞^1	$r=r'$
2	2	1	punto
1	2	nessuna	$\emptyset$

Come conseguenza immediata si ha il seguente:

5.2. Corollario. *Siano $r: ax+by+c=0$, $r': a'x+b'y+c'=0$ due rette di $\mathbb{A}^2$. Allora*

$$r=r' \quad \Longleftrightarrow \quad \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1.$$

5.2.1. Esempio. Siano r ed s le due rette di equazioni

$$r: \quad x+y-1=0, \qquad s: \quad x+2y+2=0.$$

Vogliamo determinare la posizione reciproca di r ed s. Basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y & = & 1 \\ x+2y & = & -2 \end{cases}.$$

Riducendo la matrice:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}=(A',B')$$

si ha $\rho(A,B)=\rho(A',B')=2$ e $\rho(A)=\rho(A')=2$. Pertanto $r\cap s=\{(4,-3)\}$.

5.2.2. Esempio. Siano r ed s_α le due rette di equazioni

$$r: \quad x + y - 1 = 0, \qquad s_\alpha: \quad x + \alpha y + 2 = 0,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Vogliamo determinare la posizione reciproca di r ed s_α, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Basta discutere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y &= & 1 \\ x + \alpha y &= & -2 \end{cases}.$$

Riducendo la matrice:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & -3 \end{pmatrix} = (A', B')$$

si ha $\rho(A, B) = \rho(A', B') = 2$ per ogni α, mentre $\rho(A) = \rho(A') = 2$ se e solo se $\alpha \neq 1$. Pertanto r ed s_α sono parallele se e solo se $\alpha = 1$ (in tal caso $s_1: \ x + y + 2 = 0$), mentre per $\alpha \neq 1$ si intersecano nel punto $r \cap s_\alpha = (\frac{\alpha+2}{\alpha-1}, \frac{3}{1-\alpha})$.

Può capitare di intersecare due rette non entrambe in forma cartesiana: ad esempio date entrambe in forma parametrica oppure una in forma parametrica e l'altra in cartesiana. Per determinarne l'intersezione, invece di ricavare le loro equazioni cartesiane e quindi procedere come sopra, si può operare direttamente, come nei seguenti esempi.

5.2.3. Esempio. Vogliamo determinare la posizione reciproca delle seguenti rette, date, rispettivamente, in forma parametrica e in forma cartesiana:

$$r: \quad (x, y) = (1, 2) + \lambda(1, -1), \qquad s: \quad 2x - y - 6 = 0.$$

Per determinare la loro intersezione, basta sostituire le relazioni fornite da r:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

nell'equazione di s, ottenendo $2(1 + \lambda) - (2 - \lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$. Quindi r ed s sono incidenti e precisamente si intersecano nel punto che si ottiene dall' equazione di r per $\lambda = 2$; dunque $r \cap s = \{(3, 0)\}$.

5.2.4. Esempio. Come in 5.2.3, vogliamo determinare la posizione reciproca delle seguenti rette:

$$r: \quad (x, y) = (1, -1) + \lambda(2, -1), \qquad s: \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Operando come sopra, si ottiene: $(1 + 2\lambda) + 2(-1 - \lambda) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 = 0$. Dunque nessun valore di λ soddisfa la relazione precedente e pertanto $r \cap s = \emptyset$. Poiché le due rette sono nel piano affine, ciò implica che r ed s sono parallele.

5.2.5. Esempio. Determinare la posizione reciproca delle rette date in equazione parametrica:

$$r: \quad (x, y) = (1, 0) + \lambda(1, -2), \qquad s: \quad (x, y) = (1, -1) + \lambda(-1, 1).$$

In questo caso basta uguagliare le coordinate del generico punto di r con quelle del generico punto di s, ricordandosi di *cambiare nome* ad uno dei due parametri, e quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 + \lambda &= & 1 - \mu \\ -2\lambda &= & -1 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda &= & -\mu \\ 2\mu &= & -1 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda &= & 1 \\ \mu &= & -1 \end{cases}.$$

Il sistema ha un'unica soluzione $(\lambda, \mu) = (1, -1)$, dunque r ed s si intersecano in un solo punto, le cui coordinate si ricavano da r per $\lambda = 1$ oppure da s per $\mu = -1$; dunque $r \cap s = \{(2, -2)\}$.

5.2.6. Esempio. Come nell'esempio precedente, vogliamo determinare la posizione reciproca di due rette date in equazione parametrica:

$$r: \quad (x,y) = (1,1) + \lambda(-1,2)\ , \qquad s: \quad (x,y) = (1,2) + \lambda(1,-2).$$

Procedendo come prima, si risolve il sistema:

$$\begin{cases} 1-\lambda &= 1+\mu \\ 1+2\lambda &= 2-2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda &= \mu \\ 1-2\mu &= 2-2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = \mu \\ \quad 1 = 2 \end{cases}.$$

Tale sistema è incompatibile, cioè $r \cap s = \emptyset$; dunque le due rette sono parallele.

5.3. *Intersezione di due piani nello spazio.*
Siano π e π' due piani dello spazio affine, di equazioni cartesiane:

$$\pi: \quad ax+by+cz+d=0, \qquad \pi': \quad a'x+b'y+c'z+d'=0.$$

La loro intersezione è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax &+ & by &+ & cz &= & -d \\ a'x &+ & b'y &+ & c'z &= & -d' \end{cases}.$$

Dette

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A,B) = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}$$

le matrici associate a tale sistema, sono possibili i seguenti casi:

$\rho(A)$	$\rho(A,B)$	sol. del sistema $AX = B$	$\pi \cap \pi'$
1	1	∞^2	$\pi = \pi'$
2	2	∞^1	retta
1	2	nessuna	$\emptyset$

Si noti che nell'ultimo caso π e π' sono paralleli.

Come immediata conseguenza, si ha il seguente:

5.4. Corollario. *Siano* $\pi: \ ax+by+cz+d=0, \quad \pi': \ a'x+b'y+c'z+d'=0$ *due piani dello spazio affine. Allora*

$$\pi = \pi' \quad \Longleftrightarrow \quad \rho\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1.$$

□

5.4.1. Esempio. Vogliamo determinare l'intersezione dei piani di $\mathbb{A}^3$:

$$\pi: \quad x-y+3z+2=0 \qquad \pi': \quad x-y+z+1=0.$$

Bisogna dunque risolvere il sistema

$$\Sigma: \quad \begin{cases} x-y+3z+2 &= 0 \\ x-y+\ \ z+1 &= 0 \end{cases}.$$

Riducendo la matrice completa (A,B)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

si vede che $\rho(A) = \rho(A,B) = 2$, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni e quindi π e π' hanno una retta in comune, la cui equazione cartesiana è data da Σ.

5.4.2. Esempio. Come prima, vogliamo determinare l'intersezione dei due piani di $\mathbb{A}^3$:

$$\pi: \quad x - y + z + 2 = 0 \qquad \pi': \quad 2x - 2y + 2z + 1 = 0.$$

Riducendo la matrice completa (A, B)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si vede che $\rho(A) = 1$ mentre $\rho(A, B) = 2$, pertanto il sistema non ha soluzioni ed i due piani non hanno punti in comune. Poiché siamo in $\mathbb{A}^3$, ciò significa che π e π' sono paralleli.

5.4.3. Esempio. Siano π, π', π'' i tre piani di equazioni

$$\pi: \ x - 2y - z + 1 = 0, \quad \pi': \ x + y - 2 = 0, \quad \pi'': \ 2x - 4y - 2z - 5 = 0.$$

Vogliamo determinare la posizione reciproca delle coppie di piani π, π' e π, π''. Consideriamo dapprima il sistema lineare associato all'intersezione di $\pi \cap \pi'$:

$$\Sigma: \quad \begin{cases} x - 2y - z & = & -1 \\ x + \ y & = & 2 \end{cases}.$$

Poiché

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 2$, pertanto $\pi \cap \pi'$ è la retta avente il sistema Σ per equazione cartesiana.
Per determinare l'intersezione $\pi \cap \pi''$, si consideri invece il sistema

$$\Sigma': \quad \begin{cases} x - 2y - \ z & = & -1 \\ 2x - 4y - 2z & = & 5 \end{cases}.$$

Poiché

$$(A', B') = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

si ha $\rho(A') = 1$ e $\rho(A', B') = 2$, dunque Σ non ha soluzioni e i piani π e π'' sono paralleli, di comune giacitura $S_\pi : x - 2y - z = 0$.

5.5. *Intersezione di una retta e di un piano nello spazio.*
Siano r una retta e π un piano dello spazio affine, di equazioni cartesiane:

$$r: \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad \pi: \quad ax + by + cz + d = 0.$$

La loro intersezione è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & -d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & -d_2 \\ ax & + & by & + & cz & = & -d \end{cases}.$$

Dette

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A,B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a & b & c & -d \end{pmatrix}$$

le matrici associate a tale sistema, sono possibili i seguenti casi, tenuto conto del fatto che le prime due righe di A e di (A,B) sono linearmente indipendenti in quanto corrispondono all'equazione cartesiana di una retta:

$\rho(A)$	$\rho(A,B)$	sol. del sistema $AX = B$	$\pi \cap r$
2	2	∞^1	r
3	3	∞^0	punto
2	3	nessuna	$\emptyset$

Si noti che, nel primo caso, $r \subset \pi$, mentre nell'ultimo $r//\pi$; infatti le rispettive giaciture sono

$$S_r : \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad S_\pi : \quad ax + by + cz = 0.$$

Proviamo che $S_r \subset S_\pi$. Per ipotesi, $(a,b,c) = \lambda_1(a_1,b_1,c_1) + \lambda_2(a_2,b_2,c_2)$. Consideriamo il punto $P = (x_0,y_0,z_0) \in S_r$, cioè tale che $a_ix_0 + b_iy_0 + c_iz_0 = 0$, per $i = 1,2$. Quindi $ax_0 + by_0 + cz_0 = \lambda_1(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + \lambda_2(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) = 0$, cioè $P \in S_\pi$.

5.5.1. Esempio. Vogliamo determinare la posizione reciproca della retta r e del piano π di $\mathbb{A}^3$, dove

$$r : \quad \begin{cases} x - 2y - z & = & -1 \\ x + y & = & 2 \end{cases}, \qquad \pi : \quad 2x + y - 2z - 5 = 0.$$

Consideriamo quindi la matrice associata al sistema costituito dalle tre equazioni precedenti:

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} = (A',B').$$

Pertanto $\rho(A) = 3 = \rho(A,B)$, quindi r e π sono incidenti nel punto $(3/5, 7/5, -6/5)$ soluzione del sistema $A'X = B'$.

5.5.2. Esempio. Vogliamo determinare la posizione reciproca della retta r e del piano π_h di $\mathbb{A}^3$, al variare di h in $\mathbb{R}$, dove

$$r : \quad \begin{cases} x - 2y - z & = & -1 \\ x + y & = & 2 \end{cases}, \qquad \pi_h : \quad 2x + hy - 2z - 5 = 0.$$

Consideriamo quindi la matrice associata al sistema costituito dalle tre equazioni precedenti:

$$(A_h,B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & h & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di A_h, basta osservare che esso è sicuramente almeno 2 e che $\rho(A_h) = 3$ se e solo se $\det(A_h) \neq 0$. Ma $\det(A_h) = -h - 4$, dunque se $h \neq -4$, $\rho(A_h) = 3 = \rho(A_h, B)$, pertanto r e π_h sono incidenti nel punto soluzione del sistema $A_h X = B$.
Se $h = -4$, allora $\rho(A_{-4}) = 2$ e inoltre

$$(A_{-4}, B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

quindi $\rho(A_{-4}, B) = 3$, pertanto il sistema $A_{-4}X = B$ non è risolubile; ciò significa che r e π sono paralleli.

5.5.3. Esempio. Come in 5.5.1, vogliamo determinare la posizione reciproca di una retta r e di un piano π di $\mathbb{A}^3$; qui però la retta è data in equazione parametrica e il piano in forma cartesiana. Siano

$$r: \quad (x, y, z) = (3, -1, 5) + \lambda(1, -1, 2) \qquad \pi: \quad x + y - z + 1 = 0.$$

Sostituendo le coordinate del generico punto $P = (3 + \lambda, -1 - \lambda, 5 + 2\lambda)$ di r nell'equazione di π si ha

$$(3 + \lambda) + (-1 - \lambda) - (5 + 2\lambda) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1.$$

Pertanto $r \cap \pi = (2, 0, 3)$.

5.6. *Intersezione di due rette nello spazio.*
Siano r ed r' due rette dello spazio affine, di equazioni cartesiane:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1 = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z + d'_2 = 0 \end{cases}$$

Dette

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A, B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & -d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & -d'_2 \end{pmatrix}$$

le matrici associate a tale sistema, sono possibili i seguenti casi:

$\rho(A)$	$\rho(A, B)$	sol. del sistema $AX = B$	$r \cap r'$
2	2	∞^1	r
3	3	∞^0	punto
2	3	nessuna	$\emptyset$
3	4	nessuna	$\emptyset$

Nel primo caso $r \equiv r'$; nel secondo le due rette sono incidenti. Vogliamo distinguere gli ultimi due casi: nel terzo caso le righe R_3 e R_4 di A sono combinazione lineare di R_1 e R_2, dunque i sistemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti, cioè $S_r = S_{r'}$, quindi r ed r' sono parallele. Nell'ultimo caso ciò non accade: r ed r' non hanno punti in comune e non sono parallele, cioè sono sghembe.

5.6.1. Esempio. Siano r ed r' le due rette dello spazio affine, di equazioni cartesiane:

$$r: \quad \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x \qquad + \ \ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r': \quad \begin{cases} \qquad y - z + 2 = 0 \\ x + y + z \qquad = 0 \end{cases}$$

Per determinare la posizione reciproca di r e r' basta ridurre per righe la matrice completa del sistema associato a $r \cap r'$:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = (A', B').$$

Poiché $\rho(A') = 3$ e $\rho(A', B') = 4$, il sistema non ammette soluzioni; più precisamente r ed r' sono sghembe.