Prova di allenamento 2
per la gara di matematica a squadre

Trieste 16/02/2011

Istruzioni Generali

1. Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.

2. Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.

3. Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.

4. Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

5. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2360 \qquad \pi = 3.1416.$$

Esercizi

Esercizio 1. (**punti 20**) Le pagine di un libro sono numerate partendo da 1. Per numerare tutte le pagine, sono state scritte in totale 3025 cifre. Quante pagine ha il libro?

Esercizio 2. (**punti 20**) In quanti modi si può completare una griglia 4×4 seguendo le regole di un "mini"-sudoku, sapendo che la prima riga è $(1, 2, 3, 4)$, come nella figura? (Si ricordi che le regole del sudoku prevedono che in ogni riga, in ogni colonna e in ognuno dei 4 quadrati 2×2 devono comparire i numeri $1, 2, 3$ e 4)

1	2	3	4

Esercizio 3. (**punti 30**) Andrea ha perso il suo orologio e vuole sapere che ore sono. Si rivolge a uno strano passante, che gli risponde:"Sono tra le 10:00 e le 11:00. Inoltre tra 6 minuti la lancetta dei minuti sarà esattamente opposta a dove si trovava la lancetta delle ore 3 minuti fa". Che ore sono precisamente? *(Indicare nella risposta i minuti e i secondi, es. se sono le 10:28:06 rispondere con 2806)*

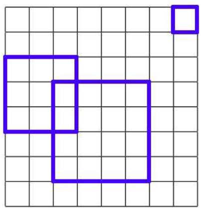
Esercizio 4. (**punti 30**) I numeri a e b sono interi positivi. Qual è il minimo valore positivo di $a + b$ affinchè $21ab^2$ e $15ab$ siano entrambi quadrati perfetti?

Esercizio 5. (**punti 40**) Considera una pila ordinata di 2011 fogli numerati a partire da 1 (cioè il primo foglio in alto riporta il numero 1). Ora costruisci una nuova pila nel modo seguente: prendi il primo foglio, poni il secondo sotto il primo e il terzo sopra il primo; poi il quarto foglio andrà sotto il secondo e il quinto sopra il terzo e così via. Una volta completata l'operazione, si rinumerino i fogli con lo stesso criterio di prima. Ci saranno dei fogli che ricevono lo stesso numero nelle due numerazioni?
(*Rispondere con la somma dei numeri. Se la risposta è no, scrivi 0000. Se la risposta supera 9999, scrivi 9999.*)

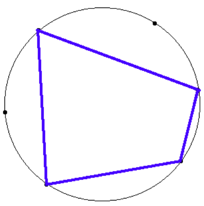
Esercizio 6. (**punti 40**) Nel triangolo ABC il punto F divide il lato AC in modo che $CF = 2AF$. Sia ora G il punto medio di BF ed E l'intersezione su BC del prolungamento di AG. Sapendo che $BC = 100$, determinare EC.

Esercizio 7. (**punti 45**) Data una griglia quadrata formata dall'accostamento di 8×8 quadrati di lato 1, è possibile colorare di blu il bordo dei quadrati i cui lati siano contenuti nel reticolo evidenziato dalla griglia, ovunque siano e di qualunque dimensione essi siano (in figura si vede un esempio in cui si sono colorati tre quadrati).

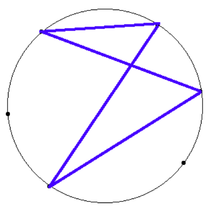
Qual è il minimo numero di quadrati di cui bisogna colorare il bordo per avere *tutte* le linee della griglia di partenza interamente colorate di blu?



Esercizio 8. (**punti 50**) Sono assegnati sei punti su una circonferenza. Se vengono tracciate 4 corde in modo casuale, ognuna congiungente due punti dei nostri sei, qual è la probabilità che i quattro segmenti descrivano un quadrilatero convesso (cioè che non si autointerseca, vedi figura)?
(Rispondere con la somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

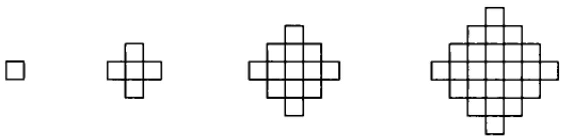


sì



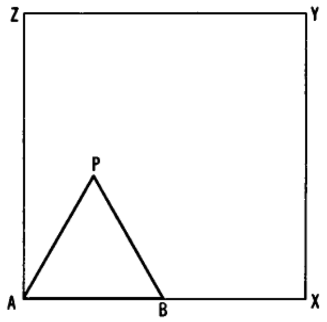
no

Esercizio 9. (**punti 50**) Chiamiamo n un *numero stellare* se mediante n quadratini si riesce a costruire una figura a forma di stella, come mostrato in figura. I primi numeri stellari sono $1, 5, 13, 25\ldots$ Determinare il 59-esimo numero stellare.



Esercizio 10. (**punti 60**) Il triangolo equilatero ABP, con lato AB di lunghezza 2, è dentro il quadrato $AXYZ$, che ha lato 4 (vedi figura). Il triangolo è ruotato in senso orario attorno a B finchè il suo lato non poggia su AX, poi si ruota di nuovo il triangolo attorno a P finchè il lato PA non poggia su XY, e così via fino a che tutti i punti P, A e B ritornano nella posizione originaria.

Qual è la lunghezza del percorso tracciato da P?



Esercizio 11. (**punti 60**) Consideriamo il polinomio $P(x) = (1 + x + x^2)^8$. Determinare la somma dei coefficienti dei monomi di grado pari di $P(x)$. In altre parole, se

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{15} x^{15} + a_{16} x^{16}$$

determinare $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{16}$.

Esercizio 12. (**punti 80**) Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da $(0, 0, 0)$. Ogni suo salto consiste nell'incrementare una e una sola delle sue coordinate di 1. In quanti modi puó raggiungere il punto $(3, 3, 3)$ rimanendo sempre vincolata alla superficie del cubo di lato 3 con vertice in $(0, 0, 0)$ e spigoli paralleli agli assi? (vedi un esempio di percorso in figura)

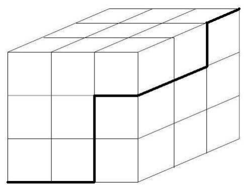


Figure 1: Percorso ammissibile