Prima prova scritta di Geometria 3, 25 giugno 2019

1. Sia A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$; dimostrare che esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$.

2. i) Dimostrare che una successione x_n in un prodotto $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ converge a x se solo se $\pi_\beta(x_n)$ converge a $\pi_\beta(x)$, per ogni $\beta \in J$ ("convergenza puntuale").

ii) Dimostrare che nessuna successione in $(R_+)^\omega$ converge a $0 = (0, 0, 0, ...) \in \mathbb{R}^\omega$, nella topologia box.

3. i) Dimostrare che il gruppo fondamentale della figura-8 (sottospazio di $\mathbb{R}^2$) non è abeliano.

ii) Classificare i numeri (sottospazi di $\mathbb{R}^2$) rispetto a omeomorfismo e rispetto a equivalenza di omotopia (elencare le classi di equivalenza, giustificando le risposte):

4. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.

5. i) Sia $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione. Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $\sigma : \mathbb{RP}^n \to S^n$ tale che $\pi \circ \sigma = id_{\mathbb{RP}^n}$.

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : N \to S^1 = \partial N$ del nastro di Moebius N sul suo bordo S^1.

6. Sia P un poligono compatto e R una retta in $\mathbb{R}^2$; dimostrare che esiste una retta parallela a R che divide P in parti di area uguale.

Seconda prova scritta di Geometria 3, 9. 7. 2019

1. Dimostrare che uno spazio compatto di Hausdorff è normale.

2. Uno spazio X è *countably compact* se ogni ricoprimento aperto numerabile di X ha un sottoricoprimento finito.

i) Dimostrare che uno spazio countably compact è limit point compact.

ii) Dimostrare che uno spazio di Hausdorff e limit point compact è countably compact (suggerimento: se nessuna sottofamiglia finita di U_n ricopre X, scegliere $x_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

3. Usando il tube Lemma, dimostrare che il prodotto $X \times Y$ di due spazi compatti X e Y è compatto.

4. Dimostrare che il quadrato ordinato I_o^2 non è localmente connesso per archi.

5. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.

6. i) Computare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n - \{0\}$ (giustificare la risposta).

ii) Computare il gruppo fondamentale del nastro di Möbius (giustificare la risposta).

Terza prova scritta di Geometria 3, 12 settembre 2019

1. Sia $\mathbb{R}^\infty$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^\omega$ di tutte le successioni reali che sono finalmente zero ($x_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici). Trovare la chiusura di $\mathbb{R}^\infty$ in $\mathbb{R}^\omega$, per la topologie prodotto e la topologia box (giustificare le risposte).

2. i) Enunciare e dimostrare il teorema del valore intermedio per spazi connessi.

ii) Sia P un poligono compatto e R una retta in $\mathbb{R}^2$; dimostrare che esiste una retta parallela a R che divide P in parti di area uguale.

3. Sia $p : E \to B$ un rivestimento con $p(e_0) = b_0$ e $f : Y \to B$ un'applicazione continua con $f(y_0) = b_0$. Se Y è connesso, dimostrare che un sollevamento $F : Y \to E$ di f con $F(y_0) = e_0$ è unico.

4. Dimostrare che uno spazio metrico X è second countable se e solo se X ha un sottoinsieme numerabile denso.

5. i) Usando il tube Lemma, dimostrare che il prodotto $X \times Y$ di due spazi compatti X e Y è compatto.

ii) Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$ è compatto.

6. i) Dimostrare che ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ del disco unitario D^2 in $\mathbb{R}^2$ ha un punto fisso.

ii) Dimostrare che i) non vale per il disco unitario aperto B^2.

iii) Dare un esempio di una retrazione che non è una retrazione di deformazione (giustificare la risposta).

Quarta prova scritta di Geometria 3, 26 settembre 2019

1. i) Sia X un insieme con la topologia del complemento finito. Dimostrare che ogni sottoinsieme di X è compatto.

ii) Se X è infinito, dimostrare che X non è di Hausdorff.

2. Sia A un sottospazio di X e B un sottospazio di Y. Dimostrare che la topologia prodotto di $A \times B$ coincide con la topologia sottospazio di $A \times B$ in $X \times Y$.

3. i) Enunciare la definizione di localmente connesso e localmente connessso per archi. Dimostrare che I_o^2 è localmente connesso.

ii) Trovare tutti i punti di I_o^2 dove I_o^2 non è localmente connesso per archi.

iii) Dare un esempio di uno spazio che è connesso per archi ma non localmente connesso per archi (giustificare tutte le risposte).

4. Dimostrare che $I^\omega \in \mathbb{R}^\omega$, con la topologia box, non è limit point compact.

5. i) Dare la definizione dello spazio proiettiva $\mathbb{RP}^n$ come insieme e come spazio topologico.

ii) Computare il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^n$ (descrivere i passi principali della computazione).

6. i) Computare il gruppo fondamentale del nastro di Möbius.

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione del nastro di Möbius sul suo bordo.

Quinta prova scritta di Geometria 3, 20.1.2020

1. i) Dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ sulla prima coordinata è un' applicazione aperta.

ii) Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa.

iii) Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, dimostrare che esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$.

2. Dimostrare che uno spazio metrico è second countable se e solo se ha un sottoinsieme numerabile denso.

3. i) Dimostrare che il nastro di Moebious è omotopo a S^1 (indicare in un disegno una retrazione di deformazione $r : N \to S^1$, e motivare perché si tratta di una retrazione di deformazione).

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : N \to S^1 = \partial N$ del nastro di Moebius N sul suo bordo S^1.

4. i) Dimostrare che il prodotto $X \times Y$ di due spazi compatti X e Y è compatto.

ii) Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$ è compatto.

5. i) Dimostrare che il gruppo fondamentale della figura-8 (sottospazio di $\mathbb{R}^2$) non è abeliano.

ii) Indicare in un disegno una retrazione di deformazione r dal piano meno due punti $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ alla figura-8.

6. i) Siw X first countable, $A \subset X$ e $x \in \bar{A}$. Dimostrare che esiste una successione in A ch e converge a x.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia box non è first countable.

iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia uniforme non è second countable.

Sesta prova scritta di Geometria 3, 4.2.2020

1. i) Dimostrare che uno spazio metrico è second countable se e solo se ha un sottoinsieme numerabile denso.

ii) Dimostrare che uno spazio compatto metrico è second countable.

2. i) Dare la definizione di uno spazio first countable. Sia X first countable, $A \subset X$ e $x \in \bar{A}$; dimostrare che esiste una successione in A che converge a x.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia box non è first countable.

iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia uniforme non è second countable.

3. Sia $p : E \to B$ un rivestimento con $p(e_0) = b_0$ e $f : Y \to B$ un'applicazione continua con $f(y_0) = b_0$. Se Y è connesso, dimostrare che un sollevamento $\tilde{f} : Y \to E$ di f con $\tilde{f}(y_0) = e_0$ è unico.

4. i) Enunciare la definizione di localmente connesso e localmente connessso per archi. Dimostrare che il quadrato ordianto I_o^2 è localmente connesso.

ii) Trovare i componenti per archi del quadrato ordianto I_o^2 (giustificare la risposta).

iii) Trovare tutti i punti di I_o^2 dove I_o^2 non è localmente connesso per archi (giustificare la risposta).

5. Sia $f : X \to Y$ un omeomorpfismo. Dimostrare che $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo.

ii) Dare la definizioni di equivalenza di omotopia e di deformazione di retrazione.

iii) Dimostrare che $\mathbb{RP}^1$ non è un ritratto di $\mathbb{RP}^2$.

iv) Dare un esempio di una retrazione che non è una retrazione di deformazione (giustificare la risposta).