Prima prova scritta di Geometria 3, 21 giugno 2018

1. i) Dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ sulla prima coordinata è un' applicazione aperta.

ii) Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa.

iii) Generalizzare il tube lemma: Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, allora esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$ (considerare primo il caso di $\{a\} \times B \subset X \times Y$, per un punto $a \in A$).

2. i) Dimostrare che una successione x_n in un prodotto $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ converge a x se $\pi_\beta(x_n)$ converge a $\pi_\beta(x)$, per ogni $\beta \in J$ ("convergenza puntuale").

ii) Dimostrare che nessuna successione in $(R_+)^\omega$ converge a $0 = (0, 0, 0, ...) \in \mathbb{R}^\omega$, nella topologia box.

3. i) Dimostrare che S_Ω è first countable ma non second countable.

ii) Dimostrare che ogni successione in S_Ω ha un limite superiore (maggiorante), e anche un estremo superiore.

4. i) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia prodotto, è second countable.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme, non è second countable.

5. i) Sia $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione. Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $\sigma : \mathbb{RP}^n \to S^n$ tale che $\pi \circ \sigma = id_{\mathbb{RP}^n}$.

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : N \to S^1 = \partial N$ del nastro di Moebius N sul suo bordo S^1.

6. i) Dimostrare che il quadrato ordinato I_o^2 non è connesso per archi.

ii) Determinare le componenti per archi del quadrato ordinato I_o^2 (giustificando la risposta).

Seconda prova scritta di Geometria 3, 11. 7. 2018

1. i) Dimostrare che uno spazio compatto di Hausdorff è normale.

ii) Dimostrare che uno spazio compatto metrico è normale.

2. i) Dimostrare che il gruppo fondamentale della figura-8 (sottospazio di $\mathbb{R}^2$) non è abeliano.

ii) Indicare in un disegno una retrazione di deformazione r dal piano meno due punti $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ alla figura-8 (immersa in $\mathbb{R}^2$).

iii) Indicare in un disegno una retrazione di deformazione del toro meno un punto sulla figure-8 (rappresentare Il toro da un quadrato con lati opposti identificati).

3. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.

4. Uno spazio X è *countably compact* se ogni ricoprimento aperto numerabile di X ha un sottoricoprimento finito. Dimostrare che uno spazio di Hausdorff X è countably compact se e solo se X è limit point compact (suggerimento: se nessuna sottofamiglia finita di U_n ricopre X, scegliere $x_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

5. i) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia prodotto, è connesso per archi.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme e la topologia box, non è connesso.

iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme e la topologia box, non è second countable.

Terza prova scritta di Geometria 3, 5 settembre 2018

1. Sia $\mathbb{R}^\infty$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^\omega$ di tutte le successioni che sono "finalmente zero" ($x_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici). Trovare la chiusura di $\mathbb{R}^\infty$ in $\mathbb{R}^\omega$, per la topologie prodotto, la topologia box e la topologia uniforme di $\mathbb{R}^\omega$ (giustificare le risposte).

2. Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, dimostrare che esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$.

3. Dimostrare che uno spazio metrico è second countable se e solo se ha un sottoinsieme numerabile denso.

4. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.

5. Uno spazio X è *countably compact* se ogni ricoprimento aperto numerabile di X ha un sottoricoprimento finito. Dimostrare che uno spazio di Hausdorff X è countably compact se e solo se X è limit point compact.

6. i) Dimostrare che ogni applicazione continua f dell'intervallo reale [-1,1] ha un punto fisso.

ii) Dimostrare che ogni applicazione continua $f : B^2 \to B^2$ della palla chiusa unitaria B^2 in $\mathbb{R}^2$ ha un punto fisso.

iii) Dimostrare che i) e ii) non rimangono validi per applicazioni continue f dell'intervallo aperto (-1,1) e della palla unitaria aperta.

Quarta prova scritta di Geometria 3, 19 settembre 2018

1. i) Dimostrare che uno spazio metrico è second countable se e solo se ha un sottoinsieme numerabile denso.

ii) Dimostrare direttamente che uno spazio metrico compatto ha un sottoinsieme numerabile denso (senza usare i).

2. i) Dimostrare che ogni applicazione continua $f : B^2 \to B^2$ ha un punto fisso, dove B^2 denota la palla unitaria chiusa in $\mathbb{R}^2$.

ii) Sia R un ritratto di B^2. Dimostrare che ogni applicazione continua $f : R \to R$ ha un punto fisso.

3. i) Dimostrare che S^1 è un ritratto di deformazione del nastro di Moebius N (usare un disegno per definire una retrazione $r : N \to S^1 \subset N$).

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : N \to \partial N$ del nastro di Moebius sul suo bordo $\partial N \cong S^1$.

4. i) Enunciare e dimostrare il teorema del valore intermedio.

ii) Sia P un poligono (limitato) e R una retta in $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che esiste una retta parallela a R che divide P in due parti della stessa area.

5. Sia A un sottospazio di X e B un sottospazio di Y. Dimostrare che la topologia prodotto di $A \times B$ coincide con la topologia sottospazio di $A \times B$ in $X \times Y$.

6. i) Determinare i componenti connessi di $\mathbb{R}_l$ (i numeri reali con la topologia del limite inferiore). Quali sono le applicazioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$?

ii) Determinare i componenti per archi del quadrato ordinato I_o^2 (giustificare tutte le risposte).

Quinta prova scritta di Geometria 3, 7 febbraio 2019

1. i) Dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ sulla prima coordinata è un' applicazione aperta.

ii) Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa.

iii) Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, dimostrare che esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$.

2. i) Dimostrare che uno spazio metrico con un sottoinsieme numerabile denso è second countable.

ii) Dimostrare che uno spazio metrico compatto è second countable.

3. i) Dimostrare che il nastro di Moebius è omotopo a S^1.

ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : N \to S^1 = \partial N$ del nastro di Moebius N sul suo bordo S^1.

4. i) Dimostrare che il quadrato ordinato I_o^2 non è connesso per archi.

ii) Determinare le componenti per archi del quadrato ordinato I_o^2.

iii) Determinare in quali punti il quadrato ordinato non è localmente connesso per archi.

(Giustificare le risposte).

5. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.

6. i) Dimostrare che il gruppo fondamentale della figura-8 (sottospazio di $\mathbb{R}^2$) non è abeliano.

ii) Indicare in un disegno una retrazione di deformazione r dal piano meno due punti $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ alla figura-8 (immersa in $\mathbb{R}^2$).

Sesta prova scritta di Geometria 3, 21 febbraio 2019

1. i) Dimostrare che uno spazio compatto è limit point compact.

ii) Dimostrare che uno spazio metrico e limit point compact è sequentially compact.

2. i) Dimostrare che il quadrato ordinato I_o^2 ha la proprietà dell'estremo superiore.

ii) Trovare le componenti per archi del quadrato ordinato (giustificare la risposta).

3. i) Enunciare e dimostrare il teorema del valore intermedio per spazi connessi.

ii) Enunciare e dimostrare il teorema del massimo e minimo per spazi compatti.

4. i) Dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ sulla prima coordinata è un' applicazione aperta.

ii) Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa. Dare un esempio che questo non è vero se Y non è compatto.

iii) Generalizzare il tube lemma: Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, allora esistono intorni U di A e V di B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$ (considerare primo il caso di $\{a\} \times B \subset X \times Y$, per un punto $a \in A$).

5. Per $n \geq 1$, sia $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione. Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $q : \mathbb{RP}^n \to S^n$ tale che $p \circ q = id_{\mathbb{RP}^n}$.

6. Sia $p : E \to B$ un rivestimento con $p(e_0) = b_0$ e $f : Y \to B$ un'applicazione continua con $f(y_0) = b_0$. Se Y è connesso, dimostrare che un sollevamento $\tilde{f} : Y \to E$ di f con $\tilde{f}(y_0) = e_0$ è unico.