Prima prova scritta di Geometria 1, 26 gennaio 2018

1. Dimostrare che
$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, K)$$
è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \to W$ la sua matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W.

2. i) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e $v_1^*, \ldots, v_n^*$ la base duale di V^*. Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,
$$v = v_1^*(v)v_1 + \ldots + v_n^*(v)v_n,$$
$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \ldots + \phi(v_n)v_n^*.$$

ii) Dimostrare che una famiglia ortonormale $(v_i)_{i \in I}$ di vettori in uno spazio unitario è linearmente indipendente.

3. Trovare se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_{13}$. Se A è triangolarizzabile, indicare la forma normale di Jordan di A.

4. In dipendenza dai parametri a, b, c e d, trovare la forma normale di Jordan della matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
e trovare in ogni caso una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia in forma normale di Jordan.

5. i) Definire il polinomio caratteristico $p_A(x)$ di una matrice quadrata A. Dimostrare che $\lambda \in K$ è autovalore di A se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico di A.

ii) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (e allora gli stessi autovalori).

iii) Sia $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$, $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ e $T \in \mathrm{GL}(n, K)$; dimostrare che le matrici A e SAT hanno lo stesso rango.

iv) Siano A e B matrici simili con autovalore λ; dimostrare che le molteplicità geometriche di λ coincidono per le matrici A e B.

6. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo unitario. Dimostrare che:
i) ogni autovalore di f ha valore assoluto 1;
ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;
iii) esiste una base ortonormale di autovettori di f.

Seconda prova scritta di Geometria 1, 16 febbraio 2018

1. i) Dato un elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$, per un numero primo p, dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$, è iniettiva (dimostrazione diretta, cioè senza usare il fatto che $\mathbb{Z}_p$ è un campo).

ii) Dedurre da i) che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

2. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare:

i) Le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilatero) sono ortogonali.

ii) Il teorema di Talete che l'angolo opposto al diametro di un triangolo iscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

3. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita n e $f : V \to V$ un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè

$$< v, f(w) > = - < f(v), w >,$$

per tutti $v, w \in V$. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è in $i\mathbb{R}$ (un numero puramente immaginario o 0);

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) esiste una base ortonormale di autovettori di f.

4. i) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ di autovalori di A, e una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale.

ii) Applicare il cambiamento di coordinate ortogonale $x = Sy$ di $\mathbb{R}^3$ alla forma quadratica $q(x) = {}^t xAx = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_3$: quale forma quadratica diagonale $\bar{q}(y)$ si ottiene ("assi principali per q")? In queste coordinate, fare un disegno qualitativo del sottoinsieme $\{y \in \mathbb{R}^3 : \bar{q}(y) = c\}$ di $\mathbb{R}^3$, per $c = 1, -1, 0$ (indicare gli assi y_1, y_2 e y_3; quali oggetti geometrici si ottiene?).

5. i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \to W$ lineare. Dimostrare la formula di dimensione per applicazioni lineari: $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$.

ii) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tale che la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto a queste basi è della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. i) Dimostrare che ogni funzione multilineare, alternante $D : V \times \ldots \times V = V^m \to K$ è banale se $m > n = \dim(V)$.

ii) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo K. Dimostrare che una funzione determinante (multilineare, alternante) $D : V \times \ldots \times V = V^n \to K$, con $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$, è unica (solo unicità, non esistenza: dedurre la formula di Leibniz).

Terza prova scritta di Geometria 1, 19 giugno 2018

1. Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ è diagonale (quale matrice diagonale?).

2. i) Siano $f, g : V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano ($f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subset \mathrm{Aut}_f(\lambda)$.

ii) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teormea sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una base ortonormale di V che consiste di autovettori sia di f sia di g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente).

3. Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \ldots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W

4. Sia $(v_i)_{i\in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ tale che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

i) Dimostrare che i vettori v_i^* sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che i vettori v_i^* generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

5. Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in dipendenza dai parametri a e b, e trovare una base di Jordan e la matrice del cambiamento di base in ogni caso.

6. i) Dimostrare che ogni funzione multilineare, alternante $D : V \times \ldots \times V = V^m \to K$ è banale se $m > n = dim(V)$.

ii) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo K. Dimostrare che una funzione determinante (multilineare, alternante) $D : V \times \ldots \times V = V^n \to K$, con $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$, è unica (solo unicità, non esistenza: dedurre la formula di Leibniz).

Quarta prova scritta di Geometria 1, 11 luglio 2018

1. i) Sia $f : V \to V$ un endomofismo autoaggiunto di uno spazio unitario di dimensione finita. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V che consiste di autovettori di f.

ii) Dimostrare che i) vale anche nel caso reale di uno spazio Euclideo V.

2. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice del seguente sistema lineare (sul campo $K = \mathbb{R}$, indicando gli elementi pivot e i gradini in ogni passo); dire quale condizione devono soddisfare i parametri a, b, c e d tale che il sistema ha una soluzione. Poi trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = a$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b$$
$$3x_1 - x_2 - 3x_4 = c$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = d$$

3. i) Dimostrare che autovettori $v_1, \ldots, v_n$ di autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di un endomorfismo $f : V \to V$ sono linearmente indipendenti.

iii) Dimostrare che ogni famiglia ortonormale (v_i) in uno spazio Euclideo o unitario è linearmente indipendente, $i \in I$ (un insieme di indici arbitrario).

4. i) Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poi trovare una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice di Jordan.

ii) Per $1 \leq m \leq n$, dare un esempio di una matrice $n \times n$ che ha un autovalore λ di molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica m.

5. i) Sia V uno spazio Euclideo; dedurre la formula di polarizzazione che esprime il prodotto scalare in termini della norma associata.

ii) Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare che preserva la norma ($||f(v)|| = ||v||$, per ogni $v \in V$). Dimostrare che f è ortogonale (f preserva il prodotto scalare).

6. i) Dare la definizione della matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$ di un'applicazione lineare $f : V \to W$, rispetto a basi $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V e $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ di W.

ii) Dimostrare che

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, K)$$

è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \to W$ la sua matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W.

Quinta prova scritta di Geometria 1, 5 settembre 2018

1. i) Enunciare e poi dimostrare il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base (unicità e esistenza).

ii) Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un'unica matrice A (matrice $m \times n$) tale che $f = L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (unicità e esistenza, usando i)).

2. i) Per uno spazio Euclideo o unitario V, enunciare la disuguglianza di Cauchy-Schwarz.

ii) Per la norma associata al prodotto scalare di V, dimostare la disugulianza triangolare $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, primo per nel caso reale, poi anche nel caso complesso.

3. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice del seguente sistema lineare reale, indicando gli elementi pivot e i gradini in ogni passo). Poi dire per quali valori dei parametri a e b il sistema ha una soluzione, e per questi lavori trovare tutte le soluzioni del sistema.

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{gathered}$$

4. i) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Dimostrare che un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

ii) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva di spazi vettoriali V e W di dimensioni finite. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

5. i) Sia A una matrice 5×5 con un'unico autovalore λ di moltepicità algebrica 5. A meno di similitudine, enumerare tutte le forme normali di Jordan possibili per A: quante ce ne sono, e qualè la molteplicità geometrica di λ in ogni caso?

ii) Dare un esempio di una matrice di Jordan $n \times n$ con un'unico autovalore λ di moltepicità algebrica n e moltepicità geometrica m, $1 \leq m \leq n$.

6. i) Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Dimostrare che un endomorfismo $f : V \to V$ è autoaggiunto se e solo se la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

ii) Per una matrice quadrata A, dimostrare che l'endomorfismo $L(A) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoaggiunto se e solo se A è una matrice hermitiana.

iii) Dimostrare che un endomorfismo autoaggiunto $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale reale euclideo di dimensione finita ha un autovalore.

Sesta prova scritta di Geometria 1, 19 settembre 2018

1. i) Dare la definizione della matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})$ di un'applicazione lineare $f : V \to W$, rispetto a basi $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V e $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ di W.

ii) Dimostrare che
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, K)$$
è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \to W$ la sua matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W.

2. i) Determinare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo generale lineare $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ (le matrici invertibili $n \times n$ con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$, per un numero primo p).

ii) Elencare tutti gli elementi del gruppo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ (quanti sono?), e verificare che il gruppo non è abeliano.

3. i) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$. Enunciare la formula di Leibniz per il determinante di A, poi definire la matrice trasposta ${}^tA$ di A e dimostrare che $\det(A) = \det\,({}^tA)$.

ii) Elencare tutti gli elementi del gruppo simmetrico S_3 e del gruppo alternante A_4 (usando cicli disgiunti per rappresentare permutazioni), e verificare che i gruppi non sono abeliani.

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tale che la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ di f rispetto a queste basi è della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare che le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

6. i) Dimostrare che la matrice ortogonale (riflessione)
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile. Fare un disegno della retta di riflessione nel piano (indicando l'angolo con la retta della prima coordinata), dei vettori della base standard e_1, e_2 e delle loro immagini.

ii) Per la matrice ortogonale e unitaria (rotazione)
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.