Prima prova scritta di Geometria 1, 20 gennaio 2020

1. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è reale;

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) la matrice di f rispetto a una base ortonormale di V è hermitiana;

iv) esiste una base ortonormale di autovettori di f.

2. i) Sia $w_1, \dots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \dots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W.

ii) Sia $f : V \to U$ lineare e $W = \mathrm{Ker}(f)$. Dimostrare che l'applicazione $\bar{f} : V/W \to U$, con $\bar{f}([v]) = f(v)$, è ben definita, lineare e iniettiva.

3. Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.

4. i) Dimostrare che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, per ogni autovalore λ di un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

ii) Siano g, a e n numeri interi con $1 \leq g \leq a \leq n$. Dare un esempio di una matrice quadrata $n \times n$ con un autovalore λ tale che $m_g(\lambda) = g$ e $m_a(\lambda) = a$ (per numeri arbitrari g, a e n come sopra; si potrebbe provare con una matrice in forma normale di Jordan).

5. i) Dimostare il teorema di Gram-Schmidt: Sia V uno spazio unitario di dimensione finita n, allora ogni base ortonormale $v_1, \dots, v_m$ di un sottospazio U di V si prolunga ad una base ortonormale di V.

ii) Dimostrare che $V = U \oplus U^{\perp}$ dove $U^{\perp}$ denota il complemento ortogonale di U in V.

Seconda prova scritta di Geometria 1, 4 febbraio 2020

1. i) Enunciare e poi dimostrare il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base (unicità e esistenza).

ii) Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un'unica matrice $A = (a_{ij})$ (matrice $m \times n$ con coefficienti in K) tale che $f = L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

2. Trovare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{11}$ e $\mathbb{Z}_{17}$. Se A è triangolarizzabile ma non diagonalizzabile, trovare la forma normale di Jordan di A.

3. Trovare la forma normale di Jordan della matrice A, una base di Jordan e la matrice del cambiamento di coordinate, in dipendenza dai parametri a, b, c e d:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e $v_1^*, \ldots, v_n^*$ la base duale di V^*. Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,

$$v = v_1^*(v)v_1 + \ldots + v_n^*(v)v_n,$$

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \ldots + \phi(v_n)v_n^*.$$

5. i) Enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per uno spazio unitario, poi dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma associata al prodotto scalare (sul campo complesso, non reale!).

ii) Sia V uno spazio vettoriale Euclideo; dedurre la formla di polarizzazione (che esprime il prodotto scalare in termini della norma).

iii) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di una spazio Euclidea V che preserva la norma di ogni vettore ($||f(v)|| = ||v||$, per ogni $v \in V$); dimostrare che f è ortogonale (preserva il prodotto scalare).